Math. P.
105 2/

Math. P. 105t

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

<36627064830011
<36627064830011
Bayer. Staatsbibliothek

Arithmetik

von der

Rechnung mit benannten Zahlen

angefangen,

BIBLIOTHECA
MONACENSIS
Bayerische
Staatsbibliothek
München

von

Fr. Ed. Desberger,

Professor der Mathematik an der Universität und der polytechnischen Centralschule in München.

München,
bey Georg Franz.
1832.

R
W.
115. c.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorrede.

Da über Lehrbücher an der hiesigen polytechnischen Schule nichts vorgeschrieben ist, und doch auch für Arithmetik eines für nothwendig gefunden wurde, so habe ich dieses gegenwärtige in Uebereinstimmung des Vorstandes und der betreffenden Lehrer verfaßt, und selbst darnach gelehrt. Das Anschreiben und Lesen der Zahlen, und die vier einfachen Rechnungsarten mit unbenannten Zahlen sind in diesem Buche, wie in der hiesigen Schule, vorausgesetzt. Die eigentlich kaufmännischen und Wechsel-Rechnungen finden sich ebenfalls nicht hier, denn um diese Rechnungen nicht mechanisch, sondern gründlich zu erlernen, ist doch wohl die Kenntniß mancher Theile der Algebra nöthig; und ausserdem sind jene Rechnungen eigentlich Anwendungen

der arithmetischen Lehren auf specielle Gegenstände, die schon wegen ihrer eigenen Weitläufigkeit und Kunstsprache, und wegen ihres Zusammenhanges mit der Buchhaltung, einen eigenen Vortrag erfordern.

München den 5ten November 1831.

Desberger.

Rechnung mit benannten Zahlen.

§. 1. Betrachtet man Zahlen bloß für sich allein, so sind sie nur Mengen von Einheiten. Wenn z. B. die Zahl 9 gegeben ist, so hat man nichts anderes als neun Einheiten. In der Anwendung aber zählt man nicht Einheiten, sondern Dinge, und man hat bey keiner Rechnung die Absicht, irgend eine Menge von Einheiten zu finden, sondern die Menge derjenigen Dinge, welche die Frage benennt. Man will z. B. wissen, wie viele Pfunde etwas schwer ist, wie viele Gulden etwas kostet, wie viele Ellen etwas lang ist, u. dgl. Man denkt sich also unter der Einheit immer ein bestimmtes einzelnes Ding, ein Pfund, einen Gulden, eine Elle, u. s. f. Wenn z. B. jemand an zwey Orten Geld einnimmt, und zwar am ersten Orte 8 Gulden, und am zweyten 5 Gulden, so nimmt er im Ganzen so viele Gulden ein, als die zwey Zahlen 8 und 5 miteinander Einheiten enthalten, also 13 Gulden.

Denkt man sich also unter der Einheit irgend ein bestimmtes einzelnes Ding, so heißen die Zahlen, welche die Mengen solcher Dinge ausdrücken, benannte Zahlen. So wird z. B. die Zahl 5 eine benannte Zahl, wenn man sich darunter fünf Gulden, oder fünf Pfunde, u. s. w. vorstellt. Eben so hat man benannte Zahlen, wenn man 8 Pferde, 6 Arbeiter, 3 Kinder, u. s. w. ausdrückt.

§. 2. Die Dinge aber, die man sich als Einheiten denkt, sind in sehr vielen Fällen zu groß. Es giebt z. B. viele Sachen, die weniger werth sind, als einen Gulden, die geringer sind, als ein Pfund, die kürzer sind, als eine Elle, u. s. w. Man ist daher gezwungen, sich diejenigen Dinge, welche am öftesten als Einheiten gedacht werden, aus einer Menge von Theilen bestehend vorzustellen. So hat man festgesetzt, daß der Gulden aus 60 Kreuzern, und das Pfund aus 32 Loth bestehen soll, so daß es gleichviel ist, 60 Kreuzer oder einen Gulden, 32 Loth oder ein Pfund zu haben. Man hat an allen Einheiten, die sich auf Maaß, Gewicht, und Geld beziehen, Unterabtheilungen festgesetzt, und diese wieder mit eigenen Namen bezeichnet, z. B. Gulden, Kreuzer, Pfenning, Heller.

Es giebt aber auch benannte Einheiten, bey welchen eine Unterabtheilung nicht möglich ist. Dieser Fall tritt z. B. ein, wenn man sich irgend ein lebendiges Wesen, ein Thier oder einen Menschen, als Einheit vorstellt. Es giebt manche Last, zu deren Fortschaffung nicht die ganze Kraft eines Pferdes nöthig wäre; da aber das Pferd, als ein lebendiges Geschöpf, keiner Unterabtheilung fähig ist, so kann auch nicht weniger als ein Pferd vorgespannt werden.

Da man die Unterabtheilungen der verschiedenen benannten Einheiten in Bezug auf Maaß, Gewicht und Geld beständig wissen muß, so sollen nun die gebräuchlichsten mit ihren Benennungeu folgen.

§. 3. 1) Das Längenmaß.

Hier ist die Einheit ein Schuh, und dieser wird entweder in zehn oder in zwölf Theile getheilt, welche jedesmal Zoll heißen.

Zwölftheiliges Maß.

1 Klafter	hält	6 Schuh,	oder	6′
1 Schuh	=	12 Zoll,	oder	12″
1 Zoll	=	12 Linien,	oder	12‴
1 Linie	=	12 Punkte	oder	Scrupel,
			oder	12⁗

Zehntheiliges Maß.

1 Ruthe	hält	10 Schuh
1 Schuh	=	10 Zoll
1 Zoll	=	10 Linien
1 Linie	=	10 Punkte.

2) Das Hohlmaß, oder das Maß für Getreide und Mehl.

1 Schäffel	hält	6 Metzen
1 Metzen	=	2 Viertel
1 Viertel	=	4 Mäßl
1 Mäßl	=	2 Dreyßger.

3) Flüßigkeitsmaß.

Der Eimer	hält	60 Maß
Die Maß	=	4 Quart
Das Quart	=	2 Achtel.

4) Das Gewicht.

1 Centner	hält	100 ℔ (Pfund)
1 ℔	=	32 Loth
1 Loth	=	4 Quintel
1 Quintel	=	4 Pfenninggewicht.

5) Papierrechnung.

1 Ballen	hält	10 Riß
1 Riß	=	20 Buch

1 Buch	hält	24 Bogen	Schreibpapier
=	=	=	25 Bogen Druckpapier.

6) Geldrechnung.

1 fl. (Gulden)	hält	60 Kreuzer (kr.)
1 kr.	=	4 pf. (Pfenninge)
1 pf.	=	2 hl. (Heller).

§. 4. In den meisten Fällen trifft es sich, daß nicht bloß irgend eine Menge der benannten Einheiten, sondern auch noch jede Unterabtheilung vorkömmt. Wenn z. B. etwas bezahlt werden muß, das mehr kostet als 2 Gulden und weniger als 3, so müssen 2 Gulden bezahlt werden, und dann noch mehrere Kreuzer, und vielleicht auch Pfenninge. Gesetzt also, man habe drey Zahlungen zu machen, nämlich:

1) 25 fl. 45 kr. 3 pf.
2) 70 fl. 13 kr. 2 pf.
3) 38 fl. 27 kr. 1 pf.

und es soll nun berechnet werden, wie viel Geld diese Zahlungen miteinander erfordern, so heißt dieses bloß, man soll angeben, wie viele Gulden, wie viele Kreuzer und wie viele Pfenninge hergezählt werden müssen. Dieses findet man aber offenbar dadurch, daß man die Gulden addirt, die Kreuzer addirt, und die Pfenninge addirt, gerade so, als wenn jede von diesen dreyerley benannten Zahlen allein vorhanden wäre. Man erhält also

25 fl.	45 kr.	3 pf.
70 =	13 =	2 =
38 =	27 =	1 =
133 fl.	85 kr.	6 pf.

Da aber 4 Pfenninge einen Kreuzer ausmachen, und 60 Kreuzer einen Gulden, so zählt man auch in Pfenningen nur bis auf drey, und in Kreuzern nur bis auf 59. Nun

kommen aber in der oben stehenden Rechnung 6 pf. vor, und man hat also 1 kr. 2 pf. Ferner kommen 85 Kreuzer vor, also 60 kr. und 25 kr., das heißt 1 fl. 25 kr. Es muß mithin bezahlt werden

133 fl.		
1 fl.	25 kr.	
	1 kr.	2 pf.
134 fl.	26 kr.	2 pf.

Dieses Verfahren könnte man nun zwar immer beobachten, aber es wäre ein Umweg. In der Summe müssen nämlich weniger als 60 kr., und weniger als 4 pf. vorkommen. Man fange also die Addition bey den Pfenningen an. Die Summe aller Pfenninge macht dann entweder 4 oder mehr als 4, oder weniger als 4. Macht sie gerade vier, so hat man gar keinen Pfenning anzusetzen, sondern einen Kreuzer; macht sie weniger als vier, so bleibt sie stehen, wie sie ist. Macht sie aber mehr als 4, so weis man, daß man für jede 4 Pfenning einen Kreuzer anzusetzen hat. Dividirt man also die Summe aller Pfenninge mit der Zahl 4, so giebt der Quotient an, wie viele Kreuzer angesetzt werden müssen, und der Rest giebt an, wie viele Pfenninge stehen bleiben. Z. B.

7 kr.	3 pf.	
8 :	2 :	
3 :	3 :	
4 :	3 :	
	11	2 kr.
2	4	
	8	
24 kr.	3 pf.	

Wenn auf diese Weise die Summe aller Pfenninge in Kreuzern und Pfenningen hergestellt ist, sucht man die Summe aller Kreuzer, wozu auch diejenigen gezählt wer=

den, welche aus der Summe der Pfenninge entstanden sind. Fällt die Summe der Kreuzer kleiner aus als 60, so bleibt sie stehen, wie sie ist; macht sie aber mehr als 60, so dividirt man sie mit 60. Der Quotient giebt dann die Zahl der Gulden an, und der Rest die Kreuzer. Nun erst sucht man die Summe aller Gulden, zu welcher auch diejenigen gezählt werden, welche aus der Summe der Kreuzer entstanden sind.

Beyspiel.

47 fl.	18 kr.	3 pf.	
36 :	47 :	2 :	11 pf.
7 :	58 :	1 :	4 | 2 kr.
— :	53 :	2 :	8
2 :	36 :	— :	3 pf.
15 :	40 :	3 :	254 kr.
4 :	2 :		60 | 4 fl.
			240
111 fl.	14 kr.	3 pf.	14 kr.

§. 5. Das eben angewendete Verfahren ist bey allen benannten Zahlen anzuwenden. Man erhält also für die Addition folgende Regeln:

1) Man beginnet die Addition jederzeit bey den Zahlen von der niedrigsten Unterabtheilung, und geht so immer von einer niedrigern zur nächst höhern über.

2) Die Summe der niedrigsten Unterabtheilung dividirt man mit der Menge der Theile, welche eine Einheit der nächst höheren Unterabtheilung ausmachen. Der Rest dieser Division bleibt bey der niedrigsten Unterabtheilung stehen; der Quotient aber wird zur nächst höhern gezählt.

3) Auf diese Art wird fortgefahren, bis man die Summe von der höchsten Benennung erhält.

Beyspiel.

8 Centner	78 ℔.	27 Lth.
13 :	14 :	3 :
— :	62 :	30 :
— :	87 :	28 :
2 :	45 :	19 :
2 :	3	
25 Centner	89 ℔.	11 Lth.

107 Lth.
32 | 3 ℔.
96
11 Lth.

289 ℔.
100 | 2 Ctr.
200
89 ℔.

5 Schäffel	4 Metzen	1 Viertel
3 :	5 :	— :
2 :	3 :	1 :
8 :	— :	1 :
— :	5 :	1 :
3 :	2	
21 Schäffel	1 Metzen	— Viertel.

4 Viertel
2 | 2 Metzen
4
0

19 Metzen
6 | 3 Schäffel
18
1 Metzen.

§. 6. Wenn benannte Zahlen, die mit allen ihren Unterabtheilungen vorkommen, von einander abgezogen werden sollen, so hat man sich zuerst wieder vorzustellen, daß nur die Zahlen von gleicher Benennung von einander abgezogen werden, und zwar gerade so, als ob die von einerley Benennung ganz allein vorhanden wären, also z. B. Gulden von Gulden, Kreuzer von Kreuzern, u. s. w.

Beyspiel.

89 fl.	47 kr.	3 pf.
60 :	30 :	1 :
29 fl.	17 kr.	2 pf.

Allein es trifft sich sehr oft, daß man die Zahlen von gleicher Benennung nicht von einander abziehen kann, weil man die größere von der kleinern abziehen soll. Z. B.

26 fl.	48 kr.	1 pf.
15 :	50 :	3 :

Hier muß die Rechnung bey den Zahlen von der niedrigsten Benennung angefangen werden. Da man nun 3 pf. nicht von 1 pf. abziehen kann, so nimmt man von 48 kr. einen Kreuzer hinweg, so daß man 47 kr. 4 pf. hat. Man erhält dadurch in der niedrigsten Abtheilung 5 pf. Man kann aber auch 50 kr. nicht von 47 kr. abziehen, und nimmt deswegen einen von den Gulden hinweg, weil 26 fl. und 25 fl. 60 kr. gleichviel ist. Nun aber machen 60 kr. und 47 kr. miteinander 107 kr. Mit dieser Vorbereitung ist nun die Rechnung folgende:

25 fl.	107 kr.	5 pf.
15 :	50 :	3 :
10 fl.	57 kr.	2 pf.

Es sollen 17 fl. 23 kr. 3 pf. von 50 fl. abgezogen werden, so erhält man auf dieselbe Weise, wie oben,

49 fl.	59 kr.	4 pf.
17 :	23 :	3 :
32 fl.	36 kr.	1 pf.

Es ist also hier die einzige Regel zu merken, daß man überall, wo man die größere Zahl von der kleinern abziehen soll, eine Einheit von der nächst höhern Benennung herübernimmt, und durch ihre Theile ausdrückt.

	132	39
25 Ctr.	33 ℔.	7 Lth.
18 :	87 :	19 :
6 Ctr.	45 ℔.	20 Lth.

§. 7. Bey der Multiplication sind zweyerley Aufgaben möglich, nämlich 1) benannte Zahlen mit unbenannten zu multipliciren, und 2) benannte Zahlen mit benannten.

Es sollen also zuerst benannte Zahlen mit unbenannten multiplicirt werden. Gesetzt es sollen

25 fl. 32 kr. 3 pf.

mit 8 multiplicirt werden, so heißt dieses, man will achtmal so viel Gulden, achtmal so viel Kreuzer, und achtmal so viel Pfenninge als jetzt gegeben sind. Man multiplicirt also die Zahlen von jeder Benennung. Dieses giebt

fl.	kr.	pf.
25 fl.	32 kr.	3 pf.
		8
200 fl.	256 kr.	24 pf.

Da aber 24 pf. so viel als 6 kr., und 256 kr. so viel als 4 fl. 16 kr. sind, so hat man

fl.	kr.
200 fl.	
4 :	16 kr.
	6 :
204 fl.	22 kr.

Man kann also auf folgende Weise verfahren: 1) Man multiplicirt die Zahl von der niedrigsten Benennung, und dividirt das Product mit der Menge Theile, welche eine Einheit der nächst höhern Benennung ausmachen. Der Rest dieser Division bleibt bey den Zahlen der niedrigsten Benennung stehen, der Quotient aber wird zum Product aus der nächst höhern Benennung addirt. 2) Auf die ganz gleiche Art wird fortgefahren, bis man das Product von der höchsten Benennung erhält.

Beyspiel.

17 fl.	49 kr.	3 pf.	27 pf.	447 kr.
7	6	9	4 | 6 kr.	60 | 7 fl.
			24	420
160 fl.	27 kr.	3 pf.	3 pf.	27 kr.

Man kann auch, wenn man will, auf folgende Weise verfahren. Man verwandelt das ganze Multiplicand in eine Zahl von der niedrigsten Benennung, multiplicirt dann, und sucht durch Divisionen die Zahlen der höhern Benen=

nungen heraus. Wenn man irgend eine Anzahl Gulden hat, so hat man 60 mal so viele Kreuzer. Man multiplicirt also die gegebene Menge Gulden mit 60, und addirt die gegebene Anzahl Kreuzer hinzu. In dem obigen Beyspiel erhält man also

```
17 fl. 49 kr. 3 pf.
60
———————————
1069 kr. 3 pf.
4
———————————
4279 pf.
```

Es ist also gleichviel, 17 fl. 49 kr. 3 pf. oder 4279 pf. anzusetzen. Multiplicirt man nun mit 9, so erhält man:

```
4279 pf.
   9
——————
38511 pf.
  4   | 9627 kr.
 36        60   | 160 fl.
 ——         ——
 25       362
  4        60
 24       360
 ——       ———
 11        27 kr.
  4
  8
 ——
 31
  4
 28
 ——
  3 pf.
```

Das Product ist also 160 fl. 27 kr. 3 pf. wie zuvor. Dieses Verfahren ist aber viel unbequemer als das erste, weil man es während der Rechnung immer mit sehr großen Zahlen zu thun hat, und deswegen auch der Gefahr, sich zu irren, mehr ausgesetzt ist.

20 Ctr. 78 ℔. 17 Lth.
12

240 : 156 : 34 :
78 17

240 Ctr. 936 ℔. 204 Lth.
100 | 9 Ctr. 32 | 6 ℔.
900 192

36 ℔. 12 Lth.

240 Ctr.
9 : 36 ℔.
6 : 12 Lth.

249 Ctr. 42 ℔. 12 Lth.

Was nun die zweyte Aufgabe anbelangt, nämlich benannte Zahlen mit benannten Zahlen zu multipliciren, so ist es am besten, ihre Auflösung dahin zu versparen, wo wirklich solche Rechnungen vorkommen, und es ist hier genug, zu wissen, daß solche Aufgaben möglich sind.

§. 8. Bey der Division der benannten Zahlen sind ebenfalls wieder zweyerley Aufgaben möglich, nämlich eine benannte Zahl mit einer unbenannten zu dividiren, oder eine benannte mit einer benannten; und es soll gleichfalls hier wieder nur die erste Aufgabe gelöset werden. Es sollen z. B.

331 fl. 7 kr. 1 pf.

mit 13 dividirt werden. Dividirt man zuerst die Gulden, so erhält man

331
13 | 25 fl.
26

71
13
65

6 fl.

Es bleiben also 6 fl. als Rest, welche noch getheilt werden sollen. Drückt man nun diese in Kreuzern aus, und addirt die 7 kr., welche im Dividende stehen, noch hinzu, so läßt sich neuerdings dividiren, und man findet die Kreuzer, welche im Quotienten vorkommen. Man erhält also

```
 6 fl. 7 kr.
 60
 ───
 367 | 28 kr.
  13
  26
 ───
 107
  13
 104
 ───
   3 kr.
```

Bey dieser Division bleiben 3 kr. als Rest, die noch getheilt werden sollen. Verwandelt man sie also in Pfenninge, und addirt den einzelnen Pfenning, der im Dividende steht, hinzu, so kann man wieder dividiren, und findet, wie viele Pfenninge im Quotienten stehen. Dieses giebt

```
 3 kr.  1 pf.
 4
 ───
 13 pf.
 13 | 1 pf.
 ──
```

Man erhält also als Quotienten

25 fl. 28 kr. 1 pf.

Man sieht wohl, daß dieses Verfahren allgemein für alle benannten Zahlen gilt. Man geht also auf folgende Weise zu Werke: Man dividirt zuerst die Zahl von der höchsten Benennung. Was durch die Division herauskömmt, bildet die Zahl von der höchsten Benennung im gesuchten Quotienten. Der Rest aber, welcher bey der ersten Division übrig bleibt, wird in eine Zahl von der nächst niedrigern Benennung verwandelt, zu welcher man die Zahl von der nämlichen Benennung im Dividende addirt. Dann dividirt man

neuerdings. So wird fortgefahren, bis man die Zahl von der niedrigsten Benennung gefunden hat.

Beyspiel.

```
Dividend:  160 fl. 27 kr. 3 pf.
Divisor:     9  | 17 fl.
            ---
            70
             9
            63
            ---
             7
            60
            ---
           447 kr.
             9   | 49 kr.
            36
            ---
            87
             9
            81
            ---
             6
             4
            ---
            27 pf.
             9  | 3 pf.
            27
            ---
            —
```

Der gesuchte Quotient ist also

17 fl. 49 kr. 3 pf.

Oder: Der neunte Theil von 160 fl. 27 kr. 3 pf. beträgt 17 fl. 49 kr. 3 pf.

Ferner:

Dividend: 249 Ctr. 42 ℔. 12 Lth.
Divisor: 12 | 20 Ctr.
24
9
12
0
9
100
942 ℔.
12 | 78 ℔.
84
102
12
96
6
32
204 Lth.
12 | 17 Lth.
84
12
84
—

Der zwölfte Theil von 249 Ctr. 42 ℔. 11 Lth. beträgt also 20 Ctr. 78 ℔. 17 Lth.

Ferner:

Dividend: 840 fl. 7 kr. 2 pf.
Divisor: 15 | 56 fl.
75
90
15
90
— 7 kr.
15 | 0 kr.
0
7
4
30 pf.
15 | 2 pf.
30
—

Der gesuchte Quotient ist also 56 fl. — kr. 2 pf.

Man kann hier ebenfalls, wenn man will, das Dividend in eine Zahl von der niedrigsten Benennung verwandeln, und dann erst dividiren; allein man hat dabey mehr zu rechnen, und hat es mit großen Zahlen zu thun, die man überhaupt, so weit es möglich ist, vermeiden soll. Es sey nochmal als Beyspiel gegeben:

Dividend: 160 fl. 27 kr. 3 pf.
Divisor: 9

so wird die Rechnung nach diesem Verfahren folgende:

```
 160 fl. 27 kr. 3 pf.
  60
 9627 kr. 3 pf.
    4
 38511 pf.
 9  | 4279 pf. | 1069 kr. | 17 fl.
 36    4          60
 25   27         469
  9    4          60
 18   24         420
 71   39          49 kr.
  9    4
 63   36
 81    3 pf.
  9
 81
 —
```

Also ist der Quotient 17 fl. 49 kr. 3 pf., wie zuvor. Dieses Verfahren hat auch noch das unbequeme, daß man den wichtigsten Theil des Quotienten, nämlich die Zahl von der höchsten Benennung erst ganz zuletzt findet; da man hingegen bey der ersten Verfahrungsweise den Theil des Quotienten, der unter der höchsten Benennung vorkömmt, immer unmittelbar zuerst findet.

Rechnung mit Brüchen.

§. 9. Da man in der Anwendung immer Mengen von Dingen sucht, von welchen man sich ein einzelnes als Einheit denkt, z. B. einen Gulden, ein Pfund, so findet sich bey einer unzähligen Menge von Aufgaben, daß diese Einheiten zu groß sind. Man hat daher, wie schon §. 2. gesagt wurde, bey den am öftesten vorkommenden benannten Einheiten Unterabtheilungen angebracht. Man hat z. B. den Gulden in 60 kr. getheilt, und den Kreuzer in 4 Pfenning, oder also den Gulden in 240 Pfenninge. Aber diese Eintheilung reicht doch nicht für alle Zwecke hin, sondern man soll den Gulden in eine beliebige Menge von Theilen zerlegen können, wenn man jede Aufgabe ohne Ausnahme auflösen soll.

Man kömmt ferner bey der Division sehr oft in den Fall, daß der Divisor größer wird, als das Dividend. Wenn zum Beyspiel 625 mit 17 dividirt werden soll, so erhält man:

```
625 | 36
17  |
51
---
115
17
102
---
13
```

Man erhält hier 36 als Quotienten, und es bleibt 13 als Rest, den man nicht mehr mit 17 dividiren kann. Aber 36 mal 17 macht nur 612, und 37 mal 17 macht 629; der gesuchte Quotient sollte also zwischen 36 und 37 liegen, weil jener zu klein ist, und dieser zu groß. Zwischen 36 und 37 liegt aber nur eine einzige Einheit. Sollte also die Aufgabe gelöset werden, so muß man sich die Einheit wie eine benannte

nannte Zahl vorstellen, und eine Unterabtheilung anbringen. Theilt man nämlich die Einheit in 17 Theile, so wird der Quotient 13 solche Theile enthalten. Es soll noch 2863 mit 32 dividirt werden, so erhält man:

```
2863 | 89
32
256
 303
  32
 288
  15
```

Der gesuchte Quotient liegt hier zwischen 89 und 90, so daß 89 zu klein, und 90 zu groß ist. Man muß also die einzelne Einheit, welche zwischen 89 und 90 ist, in 32 gleiche Theile zerlegen können, so wird der Quotient außer den 89 Einheiten auch noch 15 solche Theile enthalten, wovon man 32 auf eine Einheit rechnet. Gesetzt also, das Dividend drücke Pfunde aus; so daß also 2863 ℔. mit 32 dividirt werden sollen, so ist der Quotient 89 ℔. 15 Lth. Bedeutet aber das Dividend nicht Pfunde, sondern irgend eine andere benannte oder unbenannte Zahl, bey welcher eine Unterabtheilung in 32 Theile nicht schon angenommen ist, so läßt sich die Aufgabe doch nur in der Voraussetzung auflösen, daß man im Stande sey, die Einheit in 32 Theile zu zerlegen, und 15 solche Theile dem Quotienten beyzufügen.

Man sieht aus diesen Beyspielen, daß es ohne Ausnahme immer nur darauf ankommen kann, eine einzige Einheit in irgend eine beliebige Menge von Theilen zerlegen zu können. Man rechnet daher gerade so, als ob jede solche Theilung, wie bey den benannten Zahlen, schon gegeben wäre, und nennt die Zahl, die aus einer solchen Theilung entsteht, einen Bruch, oder eine gebrochene Zahl.

Ein Bruch ist also eine Zahl, welche kleiner ist, als eine Einheit, und drückt einen oder mehrere Theile einer Einheit aus. Ein Bruch kann daher auch nur mit zwey Zahlen geschrieben werden, wovon eine anzeigt, in wie viele Theile die Einheit getheilt werden muß, und die andere, wie viele von diesen Theilen genommen werden. Man trennt diese zwey Zahlen durch einen wagerechten Strich, indem man unter denselben die Zahl aller Theile schreibt, in welche die Einheit getheilt werden soll, und über denselben die Zahl der Theile, welche wirklich genommen werden. So ist z. B.

$$\frac{5}{7}$$

ein Bruch, und drückt aus, daß die Einheit, sie mag eine benannte oder unbenannte seyn, in sieben Theile zerlegt werden, und daß man davon fünf Theile nehmen soll.

Die Zahl, welche unter dem Striche steht, heißt der Nenner, und die Zahl über dem Striche heißt der Zähler. Der Nenner giebt folglich immer an, in wie viele Theile die Einheit getheilt wird, und der Zähler, wie viele solche Theile man nehmen soll.

Nach diesen Erklärungen sind die Unterabtheilungen der benannten Zahlen wirklich Brüche, bey welchen bloß der Nenner nicht angeschrieben wird, weil er einen besondern Namen hat. Da z. B. 60 kr. einen Gulden ausmachen, so ist jeder Kreuzer $\frac{1}{60}$ Gulden, und 3 fl. 17 kr. ist eben so viel, als 3 fl. und $\frac{17}{60}$ fl. Man schreibt aber in solchen Fällen die ganze Zahl und den Bruch unmittelbar nebeneinander, z. B. $3\frac{17}{60}$ fl., $15\frac{3}{4}$ ℔., u. s. w.

§. 10. Aus der Entstehung der Brüche, und aus der Art, wie man sie schreibt, ergeben sich folgende Sätze:

1) Da der Nenner angiebt, in wie viele Theile eine Einheit getheilt ist, so werden diese Theile desto kleiner, je

größer ihre Anzahl, je größer also der Nenner ist. Z. B. $\frac{1}{60}$ fl. bedeutet einen Kreuzer, hingegen $\frac{1}{240}$ fl. nur mehr einen Pfenning.

2) Je kleiner der Unterschied zwischen dem Zähler und Nenner, und je größer zugleich der Nenner ist, desto näher kommt der Bruch einer ganzen Einheit. Wenn z. B. $\frac{59}{60}$ fl. gegeben ist, so fehlt nur mehr ein Kreuzer von einem ganzen Gulden; wenn aber $\frac{239}{240}$ fl. gegeben ist, so fehlt gar nur mehr ein Pfenning von einem ganzen Gulden.

3) Ein Bruch wird nicht geändert, wenn man seinen Zähler und seinen Nenner mit irgend einer Zahl multiplicirt. Wenn z. B. $\frac{7}{60}$ fl. gegeben ist, und man multiplicirt Zähler und Nenner mit 4, so erhält man $\frac{28}{240}$ fl.; der erste Ausdruck bedeutet 7 kr. und der zweyte 28 pf., was offenbar eben so viel ist. Wenn man nämlich den gegebenen Bruch in Zähler und Nenner mit 4 multiplicirt, so heißt dieses, man theilt die Einheit in 4 mal so viel Theile als zuvor; da sie aber nun 4 mal so klein werden, so muß man auch 4 mal so viele nehmen, um nicht weniger zu haben als zuvor.

4) Wenn sich ein Bruch in Zähler und Nenner mit der nämlichen Zahl dividiren läßt, so wird er ebenfalls nicht geändert. Es sey z. B. $\frac{85}{300}$ fl. gegeben, so läßt sich der Zähler und der Nenner mit 5 dividiren, und man erhält $\frac{17}{60}$ fl., oder also 17 kr. Indem man nämlich den Zähler und den Nenner mit 5 dividirt, theilt man die Einheit in 5 mal weniger Theile, als zuvor; diese werden also 5 mal größer, und man muß deswegen auch 5 mal weniger nehmen, als zuvor.

5) Da ein Bruch immer nur einen oder mehrere Theile einer einzigen Einheit ausdrückt, so ist sein Zähler immer kleiner als sein Nenner. Man kommt aber im Rechnen

doch oft auf Brüche, deren Zähler größer ist als der Nenner; z. B. $\frac{15}{8}$. Solche Brüche nennt man uneigentliche. Sie sind nämlich größer als eine Einheit; man kann also dividiren, um die ganzen Einheiten von dem eigentlichen Bruche abzusondern. Aus $\frac{15}{8}$ erhält man auf diese Art $1\frac{7}{8}$. Wenn man z. B. sagt 87 kr., so ist dieses ebenfalls uneigentlich gesprochen, denn 87 kr. machen 1 fl. 27 kr. Drückt man hier die Nenner aus, so ist zuerst der uneigentliche Bruch $\frac{87}{60}$ gegeben, und man findet durch Division $1\frac{27}{60}$.

§. 11. Da man in allen Rechnungen die großen Zahlen zu vermeiden sucht, so ist bey jedem Bruch, dessen Zähler und Nenner mit mehreren Ziffern geschrieben werden, die erste Frage, ob es nicht eine Zahl giebt, mit welcher sich Zähler und Nenner dividiren läßt. Ehe man nun die Regeln aufsucht, nach welchen man den gesuchten Divisor bestimmen, oder überhaupt die Theilbarkeit der Zahlen erkennen kann, sind noch folgende Unterschiede zu merken:

1) Wenn eine Zahl mit gar keiner andern, als nur mit der Einheit und mit sich selbst, dividirt werden kann, so nennt man sie eine Primzahl. Solche Zahlen sind z. B. 7, 11, 13, 17, 19 u. s. w.

2) Wenn eine Zahl sich mit einer oder mehrern andern dividiren läßt, so nennt man sie eine zusammengesetzte Zahl. Eine solche Zahl ist z. B. 24, denn sie läßt sich mit 2, mit 3, mit 4, mit 6, mit 8, und mit 12 dividiren.

3) Wenn zwey Zahlen miteinander verglichen werden, wovon jede eine zusammengesetzte Zahl ist, ohne daß sie einen gemeinschaftlichen Divisor haben, so nennt man sie „Primzahlen unter sich". Solche Zahlen sind z. B. 20 und 33. Die erste läßt sich mit 2, mit 4, und mit 5 dividiren, und die zweyte mit 3 und mit 11. Sie sind also beyde zusammengesetzte Zahlen; wenn man sie aber mitein=

der vergleicht, so findet man keine Zahl, mit welcher man beyde dividiren könnte, und es ist also eine in Bezug auf die andere eine Primzahl.

4) Die zusammengesetzten Zahlen sind entweder gerade oder ungerade Zahlen. Sie sind gerade Zahlen, wenn sie sich mit 2 dividiren lassen, und sind ungerade, wenn sie sich nicht mit 2 dividiren lassen. So ist z. B. 8 eine gerade Zahl, und 9 eine ungerade. Alle Primzahlen sind zugleich ungerade Zahlen; und wenn zwey Zahlen Primzahlen unter sich sind, so ist wenigstens eine eine ungerade Zahl.

§. 12. Es giebt bestimmte Kennzeichen, aus welchen man erkennt, ob sich eine gegebene Zahl durch irgend eine der ersten und einfachen Zahlen dividiren läßt. Diese Kennzeichen sind folgende:

1) Jede Zahl läßt sich mit 2 dividiren, wenn ihre letzte Ziffer entweder null oder eine gerade Zahl ist. Solche Zahlen sind z. B. 2470 und 1398.

2) Jede Zahl läßt sich mit 3 dividiren, wenn sich die Summe aller ihrer Ziffer mit 3 dividiren läßt. Solche Zahlen sind z. B. 8844 und 7896. Bey der ersten macht die Summe der Ziffer 24, und bey der zweyten 30, welche sich beyde mit 3 dividiren lassen.

3) Jede Zahl läßt sich mit 4 dividiren, wenn sich ihre letzten zwey Ziffer als besondere Zahl betrachtet, mit 4 dividiren lassen. Z. B. 9708 und 12312.

4) Jede Zahl läßt sich mit 5 dividiren, deren letzte Ziffer null oder 5 ist. Z. B. 7320 und 8475.

5) Jede Zahl läßt sich mit 6 dividiren, wenn die Summe aller ihrer Ziffer mit 3 dividirt werden kann, und wenn zugleich die letzte Ziffer null oder eine gerade Zahl ist, d. h. also, wenn die Kennzeichen der Theilbarkeit mit 2 und mit 3 zugleich vorhanden sind. Z. B. 7230 und 79992.

6) Für den Divisor 7 giebt es keine so einfachen Kennzeichen.

7) Jede Zahl ist durch 8 theilbar, wenn sich ihre drey letzten Ziffer als besondere Zahl betrachtet, durch 8 theilen lassen. Z. B. 7008 und 97984.

8) Jede Zahl ist mit 9 theilbar, wenn die Summe aller ihrer Ziffer mit 9 theilbar ist. Z. B. 2322 und 123453.

9) Jede Zahl ist mit 10 theilbar, deren letzte Ziffer null ist.

10) Jede Zahl läßt sich mit 11 dividiren, wenn man gleichviel erhält, ob man die Ziffer an allen ungeraden oder an allen geraden Stellen addirt. Z. B. 235796, und 8097358.

Wenn also ein Bruch vorkömmt, der in Zähler und Nenner mit einer von den Zahlen dividirt werden kann, deren Kennzeichen hier angegeben sind, so läßt er sich leicht auf einen bequemern Ausdruck bringen. Es sey z. B. gegeben

$$\frac{1683}{3168}.$$

Hier macht die Summe der Ziffer sowohl im Zähler als im Nenner 18, und man kann folglich mit 9 dividiren. Es macht aber auch die Summe der Ziffer an den geraden und die an den ungeraden Stellen sowohl im Zähler als im Nenner 9, und man kann folglich auch mit 11 dividiren. Da man nun mit 9 und mit 11 dividiren kann, so kann man mit 99 dividiren, und erhält

$$\frac{17}{32}$$

§. 13. Wenn sich Zahlen nur mit größeren Primzahlen als mit 11 dividiren lassen, dann ist es überhaupt nicht mehr so leicht, die Divisoren zu finden. Da es aber hier

nur darauf ankömmt, eine Zahl zu finden, mit welcher sich der Zähler und der Nenner zugleich dividiren läßt, so ist es nicht nöthig, alle Divisoren des Zählers und des Nenners abgesondert aufzusuchen, sondern man verfährt auf folgende Weise:

1) Man dividirt den Nenner mit dem Zähler. Geht diese Division auf, so ist der Zähler selbst die Zahl, mit welcher sich der Bruch verkleinern läßt. Geht aber diese Division nicht auf, sondern bleibt irgend ein Rest, der größer als 1 ist, so macht man

2) diesen gebliebenen Rest zum Divisor, und den vorigen Divisor, d. h. den Zähler des gegebenen Bruches, zum Dividend. Geht diese Division auf, so ist der gebrauchte Divisor die Zahl, mit welcher sich der gegebene Bruch verkleinern läßt, geht sie aber nicht auf, so macht man

3) wieder den gebliebenen Rest zum Divisor, und den vorigen Divisor zum Dividend. Auf diese Art wird überhaupt fortgefahren, bis endlich einmal eine Division aufgeht.

4) Bleibt nun irgend einmal bloß 1 als Rest, so läßt sich der gegebene Bruch nicht verkleinern, weil Zähler und Nenner keinen andern gemeinschaftlichen Divisor haben, als die Einheit. Geht aber die letzte Division mit irgend einer Zahl auf, welche größer ist als die Einheit, so ist auch diese Zahl der gemeinschaftliche Divisor in Zähler und Nenner.

Es sey z. B. gegeben $\frac{25}{45}$, so sieht man ohnehin, daß sich Zähler und Nenner mit 5 dividiren läßt. Wendet man aber das eben erklärte Verfahren an, so wird die Operation folgende:

```
45 | 1
25 |
---+------
20 | 25 | 1
   | 20 |
   +----+------
      5 | 20 | 4
        | 20 |
        +----+
          0
```

Die letzte Division geht mit dem Divisor 5 auf, und folglich läßt sich auch der gegebene Bruch mit 5 verkleinern, und man erhält $\frac{5}{9}$. Nun sey gegeben $\frac{117}{149}$, und man soll den gemeinschaftlichen Divisor suchen. Die Operation wird nach den oben aufgestellten Regeln folgende:

```
149 | 1
117 |
----+------
 32 | 117 | 3
    |  96 |
    +-----+------
       21 | 32 | 1
          | 21 |
          +----+------
            11 | 21 | 1
               | 11 |
               +----+------
                 10 | 11 | 1
                    | 10 |
                    +----+------
                       1 | 10 | 10
                         |    |
```

Man erhält hier die Einheit als letzten Divisor, und der gegebene Bruch ist also keiner Verkleinerung fähig. Nun sey aber noch gegeben

$$\frac{584388}{1363572}$$

so wird die Operation:

```
1363572 | 2
 584388 |
1168776 |
--------+---------
 194796 | 584388 | 3
        | 194796 |
        | 584388 |
        +--------+
            0
```

Es läßt sich folglich der Zähler und Nenner des gegebenen Bruches mit 194796 dividiren, und dadurch erhält man $\frac{3}{7}$ zum Resultat.

Es verursacht also keine Schwierigkeit, die Zahl zu finden, mit welcher sich ein gegebener Bruch verkleinern läßt; nur kann es sich treffen, daß die Division lange fortgesetzt werden muß, und daß dann der letzte Divisor doch nur 1 ist. Allein diesem Umstande läßt sich nicht ausweichen, und man weis dann doch gewiß, daß der gegebene Bruch sich nicht verkleinern läßt.

§. 14. Nachdem man nun im Stande ist, Brüche jedesmal auf ihren einfachsten Ausdruck zu bringen, so ist die nächste Aufgabe, mehrere Brüche addiren, und zwey Brüche von einander abziehen zu können. Hier sind zwey Fälle möglich, nämlich entweder haben die gegebenen Brüche gleiche Nenner, oder sie haben verschiedene.

Da nun der Nenner immer angiebt, in wie viele Theile eine benannte oder unbenannte Einheit getheilt wird, so können Brüche von einerley Nenner sich nur in der Menge der genommenen Theile unterscheiden, nicht aber in der Größe der Theile. Wenn also mehrere Brüche von gleichen Nennern gegeben sind, so vertritt der Nenner bloß die Stelle des Namens bey den Unterabtheilungen der benannten Einheiten. Wenn z. B. $\frac{7}{60}$ fl. und $\frac{13}{60}$ fl. gegeben sind, und addirt werden sollen, so ist es eben so viel, als sollten 7 kr. und 13 kr. addirt werden. Man erhält also 20 kr., oder $\frac{20}{60}$ fl., oder also $\frac{1}{3}$ fl. Wenn also die Nenner gleich sind, so werden bloß die Zähler addirt, und der gemeinschaftlich gegebene Nenner bleibt unverändert. Sollen z. B. $\frac{13}{64}$, $\frac{17}{64}$ und $\frac{29}{64}$ addirt werden, so erhält man $\frac{59}{64}$.

Ganz genau so wird auch bey der Subtraction verfahren. Es sollen z. B. $\frac{7}{16}$ von $\frac{15}{16}$ abgezogen werden, so erhält man $\frac{8}{16}$ oder $\frac{1}{2}$.

Wenn auf diese Art mehrere Brüche addirt werden, so erhält man sehr oft einen uneigentlichen Bruch als Summe. Es soll z. B. $\frac{17}{32}$, $\frac{18}{32}$, $\frac{11}{32}$ addirt werden, so erhält man $\frac{46}{32}$ oder $\frac{23}{16}$. Man hat also hier noch durch Division die ganzen Zahlen von den gebrochenen abzusondern. In dem eben behandelten Beyspiele erhält man $1\frac{7}{16}$.

Es geschieht auch, daß eigentliche und uneigentliche Brüche allein oder vermischt addirt werden sollen. Dieser Umstand ändert aber an dem angegebenen Verfahren nichts. Es sollen z. B. $\frac{45}{32}$, $\frac{17}{32}$, $\frac{65}{32}$ addirt werden, so erhält man $\frac{127}{32}$ oder $3\frac{31}{32}$.

Es soll ferner $6\frac{5}{48}$, $7\frac{7}{48}$, $1\frac{17}{48}$ und $2\frac{19}{48}$ addirt werden, so erhält man $16\frac{48}{48}$, also 17. In diesem Falle verhält sich alles gerade so, wie bey der Addition der benannten Zahlen. Man addirt nämlich die Zahlen von gleicher Benennung, als ob nur diese allein vorhanden wären, und sucht dann durch Division die Menge Einheiten der nächst höheren Benennung heraus. Dasselbe gilt von der Subtraction; man verfährt nämlich eben so, wie bey den benannten Zahlen. Es soll z. B. $1\frac{17}{29}$ von $2\frac{5}{29}$ abgezogen werden. Da sich hier $\frac{17}{29}$ nicht von $\frac{5}{29}$ abziehen läßt, so muß zuerst eine ganze Einheit herüber genommen werden. Da nun die Einheit in 29 gleiche Theile getheilt seyn soll, so ist 1 und $\frac{29}{29}$ völlig gleichbedeutend. Nun aber heißt die Aufgabe, man soll $1\frac{17}{29}$ von $1\frac{34}{29}$ abziehen. Es bleibt also $\frac{17}{29}$.

§. 15. Wenn aber Brüche mit verschiedenen Nennern gegeben sind, so ist bey jedem Bruch die Einheit in eine andere Menge von Theilen getheilt. Diese Theile sind also auch ihrer Größe nach ungleich. Die Forderung, solche Brüche zu addiren, läßt sich dann nicht erfüllen, wenn nicht zuvor eine neue Theilung der Einheit vorgenommen wird. Es soll z. B. $\frac{2}{3}$ und $\frac{4}{5}$ addirt werden. Da nun im

ersten Bruch die Einheit in drey Theile, und im zweyten in fünf getheilt ist, so sind die Theile im ersten Bruch größer als die im zweyten, und man kann also die 2 Theile, welche der erste Bruch enthält, und die 4 Theile, welche der zweyte enthält, nicht addiren. Man muß daher eine neue Theilung der Einheit vornehmen, bey welcher es möglich ist, die Theile der Einheit in beyden Brüchen gleich groß zu machen. Da nun nach §. 10. ein Bruch nicht geändert wird, wenn man ihn in Zähler und Nenner mit der nämlichen Zahl multiplicirt, so kann man sich vorstellen, die beyden Brüche $\frac{2}{3}$ und $\frac{4}{5}$ seyen durch Verkleinerung auf diese einfachen Ausdrücke gebracht worden, und können folglich vor dieser Verkleinerung gleiche Nenner gehabt haben. Multiplicirt man wirklich den ersten Bruch in Zähler und Nenner mit 5, und den zweyten mit 3, so erhält man $\frac{10}{15}$ und $\frac{12}{15}$; diese lassen sich nun addiren, und man erhält $\frac{22}{15}$, oder $1\frac{7}{15}$. Wenn man in diesem Beyspiele die Einheit in 15 Theile theilt, und 10 solche Theile nimmt, so ist es eben so viel, als hätte man die Einheit in 3 Theile zerlegt, und 2 genommen. Nimmt man aber 12 Theile von den 15 neuen, so ist es eben so viel, als hätte man die Einheit nur in 5 Theile zerlegt, und 4 genommen.

Das Verfahren, das in diesem Beyspiele beobachtet worden ist, läßt sich allgemein durch folgende Regel ausdrücken: Wenn zwey Brüche von verschiedenen Nennern addirt werden sollen, so multiplicirt man zuerst jeden von beyden in Zähler und Nenner mit dem Nenner des anderen Bruches. Dadurch erhalten sie gleiche Nenner, und man kann dann die Zähler addiren. Wenn z. B. $\frac{3}{7}$ und $\frac{2}{5}$ addirt werden sollen, so wird zuerst $\frac{3}{7}$ in Zähler und Nenner mit 5, und $\frac{2}{5}$ in Zähler und Nenner mit 7 multiplicirt; dadurch erhält man $\frac{15}{35}$ und $\frac{14}{35}$. Diese Brüche lassen sich addiren, und man erhält $\frac{29}{35}$ als Summe.

Das nämliche Verfahren muß auch befolgt werden, wenn zwey Brüche von einander abgezogen werden sollen. Es soll z. B. $\frac{5}{9}$ von $\frac{4}{7}$ abgezogen werden. Stellt man gleiche Nenner her, so erhält man $\frac{35}{63}$ und $\frac{36}{63}$, und es bleibt also $\frac{1}{63}$.

Die oben gefundene Regel reicht auch hin, um drey oder mehrere Brüche von verschiedenen Nennern addiren zu können. Man kann nämlich zuerst zwey Brüche addiren, dann die Summe aus diesen zweyen zum dritten; dann die Summe aus den ersten dreyen zum vierten, u. s. f. Es sollen z. B. die Brüche $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{7}$ addirt werden. Bringt man die ersten zwey auf einerley Nenner, so erhält man $\frac{10}{15}$, und $\frac{12}{15}$. Diese geben $\frac{22}{15}$. Nun soll man $\frac{22}{15}$ oder $1\frac{7}{15}$ und $\frac{1}{7}$ addiren. Stellt man gleiche Nenner her, so hat man $1\frac{49}{105}$ und $\frac{15}{105}$ zu addiren. Diese geben $1\frac{64}{105}$.

Betrachtet man aber dieses Verfahren genau, so findet man folgende Regel: Wenn mehrere Brüche von ungleichen Nennern gegeben sind, so werden sie auf einen gemeinschaftlichen Nenner gebracht, wenn man jeden Bruch in Zähler und Nenner mit den Nennern aller übrigen Brüche multiplicirt.

Es sey z. B. gegeben $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$, so wird nach der eben gegebenen Vorschrift

$\frac{1}{2}$ gleich $\frac{105}{210}$

$\frac{1}{3}$ . . . . . $\frac{70}{210}$

$\frac{1}{5}$ . . . . . $\frac{42}{210}$

$\frac{1}{7}$ . . . . . $\frac{30}{210}$.

Die Summe dieser vier Brüche wird also $\frac{247}{210}$ oder $1\frac{37}{210}$.

Das ganze Verfahren läßt sich nun auf folgende Weise für die Anwendung bequem machen:

1) Man schreibt alle gegebenen Brüche untereinander, und zieht rechts neben ihnen einen gerade stehenden Strich.

Desgleichen zieht man über ihnen von der Linken gegen die Rechte einen geraden wagerechten Strich.

2) Nun multiplicirt man alle Nenner miteinander, und schreibt die Zahl, welche man durch diese Multiplication erhält, über den wagerechten Strich. Diese Zahl ist der gemeinschaftliche Nenner.

3) Nun dividirt man die oben stehende Zahl mit dem Nenner eines jeden Bruches, der links vom gerade stehenden Striche angeschrieben ist, und schreibt den Quotienten auf einer geraden Linie mit diesem Bruch, und ebenfalls gerade unter den oben stehenden allgemeinen Nenner. Wenn alle diese Divisionen gemacht sind, kann man rechts von den Quotienten wieder einen gerade stehenden Strich ziehen.

4) Nun multiplicirt man den Zähler eines jeden Bruches mit der Zahl, die neben ihm steht, und schreibt das Product auf der nämlichen Linie rechts vom Striche an. Diese Producte sind die neuen Zähler, welche dem gemeinschaftlichen Nenner entsprechen.

5) Nun zieht man unter allen Zahlen einen wagerechten Strich, und addirt alle Zahlen, die man durch die letzten Multiplicationen erhalten hat, zusammen. Dadurch erhält man den Zähler des gesuchten Summenbruches, unter welchen man blos den gemeinschaftlichen Nenner zu schreiben hat.

Sollen z. B. $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{5}{11}$ addirt werden, so wird die Operation folgende:

	462	
$\frac{1}{2}$	231	231
$\frac{2}{3}$	154	308
$\frac{5}{7}$	66	330
$\frac{3}{11}$	42	126
		$\frac{995}{462}$

Die Summe der gegebenen Brüche ist also $\frac{995}{462}$ oder $2\frac{71}{462}$.

§. 16. Gemäß dem vorigen Paragraph ist der gemeinschaftliche Nenner eine Zahl, die sich mit allen gegebenen Nennern dividiren läßt. Wenn aber der gemeinschaftliche Nenner nicht die kleinste Zahl ist, welche diese Eigenschaft besitzt, so wird auch die Einheit unnöthiger Weise in eine größere Menge von Theilen, und also in kleinere Theile getheilt, als die Aufgabe erfordert. Der gemeinschaftliche Nenner soll also zu gleicher Zeit die kleinste Zahl seyn, welche sich mit allen gegebenen Nennern dividiren läßt. Es entsteht also überhaupt die Aufgabe, wenn mehrere Zahlen gegeben sind, die kleinste Zahl zu finden, welche sich mit jeder der gegebenen ohne Rest dividiren läßt. Diese Zahl heißt der kleinste Dividuus.

Diese Aufgabe zerfällt in zwey untergeordnete. Es können nämlich die gegebenen Zahlen entweder unter sich Primzahlen seyn, oder zum Theile gemeinschaftliche Divisoren haben.

Wenn die gegebenen Zahlen gar keine gemeinschaftlichen Divisoren haben, so erhält man den kleinsten Dividuus nothwendiger Weise, wenn man alle gegebenen Zahlen miteinander multiplicirt. Wenn z. B. 3, 5, 7 gegeben sind, so giebt es keine kleinere Zahl, welche sich mit jeder von diesen drey gegebenen dividiren läßt, als 105.

Sind zwey Zahlen gegeben, wovon eine in der andern enthalten ist, so ist nothwendig die größere von beyden der kleinste Dividuus. Wenn z. B. 3 und 6 gegeben ist, so ist 6 die kleinste Zahl, welche sich mit 3 und mit 6 dividiren läßt.

Nun seyen aber zwey Zahlen gegeben, welche einen gemeinschaftlichen Divisor haben. Dividirt man beyde mit dem gemeinschaftlichen Divisor, so kommen überhaupt drey Zahlen zum Vorschein, nämlich der gemeinschaftliche Divisor und die zwey Quotienten, und der kleinste Dividuus

wird erhalten, wenn man diese drey Zahlen miteinander multiplicirt. Es sey z. B. gegeben 6 und 15, so haben diese den gemeinschaftlichen Divisor 3, und man erhält die zwey Quotienten 2 und 5. Der kleinste Dividuus ist also 30, und es ist keine kleinere Zahl zu finden, welche sich sowohl mit 6 als mit 15 dividiren ließe. Es sey noch gegeben 2028 und 2548, und man soll ihren kleinsten Dividuus suchen. Um diesen finden zu können, muß man zuerst den größten gemeinschaftlichen Divisor suchen. Man erhält also

```
2548 | 1
2028
 520 | 2028 | 3
       1560
        468 | 520 | 1
              468
               52 | 468 | 9
                    468
                      0
```

Der größte gemeinschaftliche Divisor ist also 52, und man erhält die zwey Quotienten 39 und 49. Der kleinste Dividuus wird daher erhalten, wenn man die drey Zahlen 39, 49 und 52 miteinander multiplicirt. Dieses giebt 99372.

Nun sollen mehr als zwey Zahlen gegeben seyn, unter welchen mehrere einen gemeinschaftlichen Divisor haben. In diesem Falle nimmt man zuerst willkührlich ein paar Zahlen, und bestimmt ihren kleinsten Dividuus nach den obigen Regeln. Dann nimmt man diesen Dividuus und eine von den übrigen Zahlen, und bestimmt ebenfalls ihren kleinsten Dividuus. So wird fortgefahren, bis alle gegebenen Zahlen verbraucht sind, und der letzte Dividuus gilt für alle gegebenen Zahlen.

Es sey gegeben 8, 12, 15, 21, 36. Nimmt man zuerst 12 und 36, so ist 36 der kleinste Dividuus für diese beyden. Man nehme nun 36 und 8. Diese zwey Zahlen

haben den gemeinschaftlichen Divisor 4, und man erhält die zwey Quotienten 9 und 2; folglich ist 72 der kleinste Dividuus für 8, 12 und 36. Nun nehme man die Zahlen 72 und 15. Diese haben den gemeinschaftlichen Divisor 3, und man erhält die Quotienten 24 und 5, und folglich den Dividuus 360. Endlich nehme man 360 und 21. Diese haben wieder den gemeinschaftlichen Divisor 3. Man erhält die Quotienten 120 und 7, und folglich den Dividuus 2520. Die Zahl 2520 ist also die kleinste, welche sich mit den Zahlen 8, 12, 15, 21 und 36 dividiren läßt.

Wenn die gegebenen Zahlen klein sind, ist es immer leicht, den gesuchten Dividuus anzugeben. Sind sie aber groß, so muß immer zuerst der gemeinschaftliche größte Divisor aufgesucht werden.

§. 17. Da man nun in allen Fällen die kleinste Zahl finden kann, welche sich mit gegebenen Zahlen dividiren läßt, so kann man nun auch den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner bestimmen, wenn die Nenner der gegebenen Brüche ungleich sind, und zum Theile gemeinschaftliche Divisoren haben.

Der kleinste gemeinschaftliche Nenner mehrerer Brüche ist immer der kleinste Dividuus aller gegebenen Nenner. Man bestimmt ihn also nach den Regeln des vorigen Paragraphs. Die neuen Zähler aber, welche dem gemeinschaftlichen Nenner entsprechen, findet man, wenn man den gemeinschaftlichen Nenner mit einem gegebenen dividirt, und den Quotienten mit dem Zähler multiplicirt. So erhält man z. B.

	288	
$\frac{1}{2}$	144	144
$\frac{2}{3}$	96	192
$\frac{5}{8}$	36	180
$\frac{7}{9}$	32	224
$\frac{7}{36}$	8	56
$\frac{17}{96}$	3	51
		$\frac{847}{288}$ oder $2\frac{271}{288}$.

In diesem Beyspiele ist nämlich für die Nenner 2, 8 und 96 die Zahl 96 der kleinste Dividuus, und für die Nenner 3, 9 und 36 ist 36 der kleinste Dividuus. Der gesuchte gemeinschaftliche Nenner ist also der kleinste Dividuus für die Zahlen 96 und 36. Diese haben den gemeinschaftlichen Divisor 12, und man erhält die Quotienten 8 und 3. Man erhält also den gesuchten gemeinschaftlichen Nenner, wenn man 12, 8 und 3 miteinander multiplicirt, wodurch man 288 erhält.

§. 18. Nach den bis jetzt gefundenen Regeln lassen sich Brüche addiren und subtrahiren, und es sind also nun die Regeln der Multiplication zu suchen. Hier entstehen aber mehrere Aufgaben, welche nach einander gelöst werden müssen. Sie sind folgende: 1) Es soll ein Bruch mit einer ganzen Zahl multiplicirt werden; 2) ein Bruch mit einem Bruch; 3) ein uneigentlicher Bruch mit einem eigentlichen; und 4) ein uneigentlicher Bruch mit einem uneigentlichen.

Es soll zuerst die Aufgabe gelöst werden, einen Bruch mit einer ganzen Zahl zu multipliciren. Man soll z. B. $\frac{5}{8}$ mit 7 multipliciren. Dieses heißt also, es ist eine Einheit in 8 gleiche Theile getheilt, und 5 solche Theile sind genommen worden; man soll aber nun siebenmal so viele

Theile nehmen. Man nimmt also 35 solche Theile, wovon 8 eine Einheit ausmachen. Das Product ist also $\frac{35}{8}$. Man sieht, daß dieses Verfahren allgemein ist, und erhält daher folgende Regel: Wenn ein Bruch mit einer ganzen Zahl multiplicirt werden soll, so multiplicirt man den Zähler des Bruches mit der ganzen Zahl, und schreibt den Nenner unverändert darunter.

Die zweyte Aufgabe ist, einen Bruch mit einem Bruch zu multipliciren. Es soll z. B. $\frac{5}{8}$ mit $\frac{3}{7}$ multiplicirt werden. Nimmt man zuerst keine Rücksicht darauf, daß $\frac{3}{7}$ ein Bruch ist, sondern multiplicirt man bloß $\frac{5}{8}$ mit 3, so erhält man $\frac{15}{8}$. Man soll aber nicht mit 3 multipliciren, sondern mit dem siebenten Theile von drey. Das erhaltene Product $\frac{15}{8}$ ist also siebenmal zu groß. Anstatt also die Einheit in 8 Theile zu theilen, muß sie in 7 mal 8 Theile, oder also in 56 getheilt werden, und das gesuchte Product ist also $\frac{15}{56}$. Will man $\frac{5}{8}$ als Multiplicator betrachten, so kann man ebenfalls zuerst nur mit 5 multipliciren, und erhält $\frac{15}{7}$. Da man aber nicht mit 5, sondern nur mit dem achten Theile von 5 multipliciren soll, so ist das erhaltene Product 8 mal zu groß. Man muß also die Einheit nicht in 7, sondern in 8 mal 7 Theile, d. h. in 56 theilen, und folglich ist das gesuchte Product $\frac{15}{56}$, wie zuvor. Dieses Verfahren führt also auf die Regel: Wenn Brüche mit Brüchen multiplicirt werden sollen, so werden sowohl die Zähler als die Nenner mit einander multiplicirt.

Um die dritte Aufgabe zu lösen, muß man sich erinnern, daß ein uneigentlicher Bruch eines doppelten Ausdrucks fähig ist, man kann ihn nämlich so schreiben, daß der Zähler größer ist als der Nenner, oder man kann ihn durch eine ganze Zahl und durch einen eigentlichen Bruch vorstellen. So ist z. B. $\frac{24}{7}$ und $3\frac{3}{7}$ völlig gleichgültig. Nun soll dieser Bruch mit irgend einem eigentlichen Bruche,

etwa mit $\frac{4}{5}$, multiplicirt werden. Man hat folglich die Wahl, entweder $\frac{24}{7}$ oder $3\frac{3}{7}$ mit $\frac{4}{5}$ zu multipliciren. Will man $\frac{24}{7}$ mit $\frac{4}{5}$ multipliciren, so bedarf man keiner neuen Regel, sondern man multiplicirt Zähler mit Zähler, und Nenner mit Nenner. Dieses giebt $\frac{96}{35}$. Will man aber lieber $3\frac{3}{7}$ mit $\frac{4}{5}$ multipliciren, so hat man zwey Multiplicationen, es muß nämlich sowohl die ganze Zahl 3, als der Bruch $\frac{3}{7}$ mit dem Bruche $\frac{4}{5}$ multiplicirt werden. Man erhält also $\frac{12}{5}$ und $\frac{12}{35}$ oder $2\frac{2}{5}$ und $\frac{12}{35}$, und muß nun die Brüche $\frac{2}{5}$ und $\frac{12}{35}$ addiren, wodurch man $\frac{26}{35}$ erhält. Das gesuchte Product ist also $2\frac{26}{35}$. Daß aber $\frac{96}{35}$ und $2\frac{26}{35}$ gleichgültig sey, ist ohnehin offenbar. Man sieht aber zugleich, daß es bequemer ist, den uneigentlichen Bruch so zu schreiben, daß sein Zähler größer als sein Nenner ist; denn wenn man zuerst die ganze Zahl durch Division absondert, so hat man zwey Multiplicationen, und muß dann zwey Brüche von verschiedenen Nennern addiren, und deswegen zuerst noch gleiche Nenner herstellen.

Nun soll, um die 4te Aufgabe zu lösen, $\frac{7}{3}$ mit $\frac{11}{5}$ multiplicirt werden. Läßt man diese Brüche unverändert, so bedarf man keiner neuen Regel, sondern erhält $\frac{77}{15}$ oder $5\frac{2}{15}$. Will man aber $2\frac{1}{3}$ statt $\frac{7}{3}$, und $2\frac{1}{5}$ statt $\frac{11}{5}$ ansetzen, so muß bemerkt werden, daß sowohl die ganze Zahl 2 als der Bruch $\frac{1}{3}$ mit der ganzen Zahl 2 und dem Bruch $\frac{1}{5}$ multiplicirt werden muß. Man erhält also folgende vier Zahlen: 4, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{15}$. Addirt man diese drey Brüche, deren gemeinschaftlicher Nenner 15 ist, so erhält man $4\frac{17}{15}$ oder $5\frac{2}{15}$, wie zuvor. Es ist also auch in diesem Falle bequemer, die uneigentlichen Brüche unverändert anzusetzen, ohne die ganzen Zahlen abzusondern.

Wenn also z. B. gegeben ist, $3\frac{5}{3}$ mit $4\frac{5}{11}$ zu multipliciren, so ist es besser, diese beyden vermischten Zahlen

zuerst in uneigentliche Brüche umzuwandeln. Wenn nun die Einheit in 8 Theile getheilt ist, so enthalten 3 Einheiten 24 solche Theile, und $3\frac{5}{8}$ macht $\frac{29}{8}$. Wenn ferner eine Einheit in 11 Theile getheilt ist, so enthalten 4 Einheiten 44 solche Theile, und $4\frac{3}{11}$ macht $\frac{47}{11}$. Es soll also nun $\frac{29}{8}$ mit $\frac{47}{11}$ multiplicirt werden. Dadurch erhält man $\frac{1363}{88}$ oder $15\frac{43}{88}$. Man hat sich also für alle Fälle noch aus dem hier beobachteten Verfahren eine Regel zu ziehen, wie eine ganze Zahl und ein Bruch in einen uneigentlichen Bruch vereinigt werden. Man multiplicirt nämlich die ganze Zahl mit dem Nenner des Bruches, und addirt den Zähler hinzu. Diese Summe ist der Zähler des gesuchten uneigentlichen Bruches, zu welchem der Nenner des gegebenen Bruches als Nenner gehört. Z. B. $7\frac{3}{4}$ macht $\frac{31}{4}$.

Nun sind bloß noch folgende Bemerkungen zu machen:

1) Wenn zwey eigentliche Brüche miteinander multiplicirt werden, so ist jeder von beyden größer als das Product. Z. B. $\frac{2}{3}$ mit $\frac{4}{5}$ multiplicirt, macht $\frac{8}{15}$. Zieht man nun $\frac{8}{15}$ von $\frac{2}{3}$ ab, so bleibt $\frac{2}{15}$, und zieht man $\frac{8}{15}$ von $\frac{4}{5}$ ab, so bleibt $\frac{4}{15}$. Was hier an diesem Beyspiele sichtbar ist, kann man sich auf folgende Art allgemein erklären. Das Product entsteht, wenn man die beyden Zähler, und die beyden Nenner miteinander multiplicirt. Bringt man nun die beyden gegebenen Brüche auf den nämlichen Nenner, den das Product hat, so muß man jeden in Zähler und Nenner mit dem Nenner des anderen Bruches multipliciren. Der neue Zähler des ersten Bruches entsteht also aus der Multiplication des gegebenen Zählers mit dem Nenner des zweyten Bruches; und der neue Zähler des zweyten Bruches entsteht durch die Multiplication des gegebenen Zählers mit dem Nenner des ersten Bruches. Die beyden neuen Zähler enthalten also den Zähler eines Bruches und den Nenner des andern. Da nun der Zähler des

Productes der beyden Brüche bloß die gegebenen Zähler von beyden Brüchen enthält, so ist er nothwendig kleiner, als jeder der beyden neuen Zähler. Zugleich sieht man, daß diese Eigenschaft nur dann vorhanden ist, wenn zwey eigentliche Brüche multiplicirt werden.

2) Da man im Rechnen die großen Zahlen auf alle mögliche Weise vermeiden soll, so muß man bey der Multiplication von Brüchen immer darauf sehen, ob nicht der Zähler des ersten Bruches und der Nenner des zweyten, und eben so der Zähler des zweyten Bruches und der Nenner des ersten einen gemeinschaftlichen Divisor haben. Durch die Anwendung dieser Divisoren erhält man nämlich kleinere Zahlen. Es soll z. B. $\frac{28}{49}$ mit $\frac{77}{84}$ multiplicirt werden, so ist dieses eben so viel, als wenn $\frac{28}{84}$ mit $\frac{77}{49}$ multiplicirt werden sollte. Nun läßt sich aber $\frac{28}{84}$ mit 28 verkleinern, und giebt $\frac{1}{3}$, und $\frac{77}{49}$ läßt sich mit 7 verkleinern, und giebt $\frac{11}{7}$. Man hat also nun bloß $\frac{1}{3}$ mit $\frac{11}{7}$ zu multipliciren, und erhält $\frac{11}{21}$.

3) Aus dem eben erklärten folgt noch: Wenn ein Bruch mit einer ganzen Zahl zu multipliciren ist, so ist es gleichviel, ob man mit der ganzen Zahl den Zähler des Bruches multiplicirt, oder den Nenner desselben dividirt, wenn nämlich das letztere möglich ist. Wenn z. B. $\frac{7}{15}$ mit 5 multiplicirt werden soll, so ist es eben so viel, als sollte $\frac{5}{15}$ mit 7, oder also $\frac{1}{3}$ mit 7 multiplicirt werden. Man erhält also entweder $\frac{35}{15}$ oder $\frac{7}{3}$, was offenbar gleichviel ist. Es ist daher besser, zuerst zu sehen, ob sich der Nenner des Bruches mit der ganzen Zahl dividiren läßt, und nur, wenn diese Division nicht möglich ist, den Zähler zu multipliciren.

§. 19. In Bezug auf die Division sind folgende drey Aufgaben zu lösen: 1) Eine ganze Zahl durch einen Bruch

zu dividiren, 2) einen Bruch durch eine ganze Zahl, und 3) einen Bruch durch einen Bruch.

Es soll z. B. die ganze Zahl 5 durch $\frac{2}{3}$ dividirt werden. Wäre der Divisor 2, und nicht $\frac{2}{3}$, so würde man $\frac{5}{2}$ erhalten. Da aber der Divisor nur der dritte Theil von 2 ist, so muß er 3mal so oft im Dividende enthalten seyn, als die ganze Zahl 2. Der gesuchte Quotient ist also 3mal $\frac{5}{2}$, oder $\frac{15}{2}$, oder $7\frac{1}{2}$. Man kann dieses Resultat auch noch auf folgende Art finden. Da im Divisor die Einheit in drey Theile getheilt ist, so theile man sie im Dividende in dieselbe Menge von Theilen. Wenn also eine Einheit 3 Theile enthalten soll, so enthalten 5 Einheiten 15 solche Theile. Dadurch wird das Dividend $\frac{15}{3}$; und da der Divisor $\frac{2}{3}$ ist, so kömmt es nun nicht mehr auf die Größe der Theile, sondern nur allein auf ihre Menge an. Es frägt sich bloß, wie oft die 2 Theile in den 15 Theilen enthalten sind, und der Quotient wird also $\frac{15}{2}$ oder $7\frac{1}{2}$, wie zuvor.

Eine ganze Zahl wird also mit einem Bruch dividirt, indem man die ganze Zahl mit dem Nenner des Bruches multiplicirt, und den Zähler des Bruches als Nenner darunter setzt.

Nun ist die umgekehrte Aufgabe zu lösen, nämlich ein Bruch durch eine ganze Zahl zu dividiren. Es soll z. B. $\frac{2}{3}$ durch 5 dividirt werden. Theilt man im Divisor die Einheit in dieselbe Menge von Theilen, in welche sie im Dividende getheilt ist, so wird er $\frac{15}{3}$. Da nun das Dividend $\frac{2}{3}$ ist, so frägt sich bloß, wie oft 15 Theile in 2 Theilen enthalten sind, und man erhält $\frac{2}{15}$ als Quotienten. Man findet auch noch auf folgende Weise das nämliche Resultat. Wäre das Dividend 2 und nicht $\frac{2}{3}$, so wäre der Quotient $\frac{2}{5}$. Da aber das Dividend nur der dritte Theil von 2, und also 3mal kleiner ist als 2, so muß auch der Quotient

3mal kleiner als $\frac{1}{5}$ seyn. Man muß also, um 2 Theile nehmen zu dürfen, die Einheit in 3mal 5, oder 15 Theile theilen. Der gesuchte Quotient wird daher $\frac{2}{15}$ wie zuvor.

Ein Bruch wird folglich durch eine ganze Zahl dividirt, indem man den Zähler des Bruches ungeändert läßt, seinen Nenner aber mit der ganzen Zahl multiplicirt.

Endlich soll ein Bruch mit einem Bruch dividirt werden. Man soll z. B. $\frac{3}{4}$ mit $\frac{5}{7}$ dividiren. Theilt man in Dividend und Divisor die Einheit in dieselbe Menge von Theilen, so wird das Dividend $\frac{21}{28}$, und der Divisor $\frac{20}{28}$, und nun frägt sich bloß, wie oft 20 Theile in 21 Theilen von der nämlichen Größe enthalten sind. Der Quotient wird also $\frac{21}{20}$ oder $1\frac{1}{20}$. Man kann aber auch noch auf folgendem Wege zum nämlichen Resultate kommen. Es sey der Divisor 5, anstatt $\frac{5}{7}$, so hätte man $\frac{3}{4}$ mit 5 zu dividiren. Man erhält also nach der zweyten Aufgabe $\frac{3}{20}$. Nun ist aber der Divisor nicht 5, sondern $\frac{5}{7}$, d. h. man soll nicht mit 5, sondern nur mit dem siebenten Theile von 5 dividiren. Der Divisor ist folglich 7mal kleiner, als die ganze Zahl 5; er muß also auch 7mal öfter im Dividende enthalten seyn, als die ganze Zahl 5. Der Quotient wird also 7mal $\frac{3}{20}$, d. h. $\frac{21}{20}$, wie zuvor. Ein Bruch wird also mit einem Bruch dividirt, wenn man den Zähler des Dividendes mit dem Nenner des Divisors multiplicirt, und eben so den Nenner des Dividendes mit dem Zähler des Divisors; oder, wenn man den Divisor umstürzt, und dann nach den Regeln der Multiplication verfährt.

Wenn nun bey diesem Verfahren der Zähler des Divisors im Zähler des Dividendes enthalten ist, so läßt sich der Bruch, den man als Quotienten erhält, mit dem ganzen Zähler des Divisors verkleinern, und es ist eben so viel, als wenn man gleich anfangs den Zähler des Dividendes mit dem Zähler des Divisors dividirt hätte. Es soll z. B.

$\frac{6}{7}$ durch $\frac{3}{5}$ dividirt werden, so wird der Quotient $\frac{30}{21}$. Dieser Bruch läßt sich mit 3 verkleinern, und man erhält $\frac{10}{7}$, also gerade so viel, als wenn man $\frac{2}{7}$ mit $\frac{1}{5}$ dividirt hätte. Dasselbe findet in Bezug auf die Nenner statt. Es soll z. B. $\frac{5}{8}$ mit $\frac{3}{4}$ dividirt werden, so erhält man $\frac{20}{24}$. Dieser Bruch läßt sich mit 4 verkleinern, und man erhält $\frac{5}{6}$, also gerade so viel, als wenn man $\frac{5}{2}$ mit $\frac{3}{1}$ dividirt hätte. Wenn also der Zähler des Divisors im Zähler des Dividendes, und zugleich der Nenner des Divisors im Nenner des Dividendes enthalten ist, und man stellt die Division nach der vorigen Regel an, so läßt sich der Bruch, den man als Quotient erhält, mit dem Product aus Zähler und Nenner des Divisors verkleinern. Es soll z. B. $\frac{6}{35}$ mit $\frac{3}{7}$ dividirt werden, so erhält man $\frac{42}{105}$. Dieser Bruch läßt sich aber mit 21, d. h. mit 3 mal 7 verkleinern, und man erhält $\frac{2}{5}$. In diesen Fällen erhält man also den einfachsten Ausdruck des Quotienten, wenn man den Zähler des Dividendes mit dem Zähler des Divisors, und den Nenner des Dividendes mit dem Nenner des Divisors wirklich dividirt.

Wenn also überhaupt die Zähler irgend einen gemeinschaftlichen Divisor haben, und die Nenner irgend einen andern, und man stellt den Quotienten nach der ersten Regel her, so läßt sich dieser mit dem Product aus den beyden gemeinschaftlichen Divisoren verkleinern. Um dieses zu vermeiden, und den Quotienten sogleich in den kleinsten Zahlen zu erhalten, dividire man zuerst die beyden Zähler mit ihrem gemeinschaftlichen Divisor, und eben so die beyden Nenner, und wende dann erst die Regel für die Division der Brüche an. Es soll z. B. $\frac{18}{35}$ mit $\frac{15}{28}$ dividirt werden, so haben die Zähler den gemeinschaftlichen Divisor 3, und die Nenner den gemeinschaftlichen Divisor 7. Der Quotient würde sich also mit 21 verkleinern lassen, wenn man auf diese gemeinschaftlichen Divisoren nicht zuvor Rücksicht nimmt. Dividirt man aber beyde Zähler mit 3, und beyde

Nenner mit 7, so wird das Dividend $\frac{6}{8}$ und der Divisor $\frac{5}{4}$, und nun wird der Quotient $\frac{24}{25}$.

Alle bis jetzt gefundenen Regeln gelten auch für die uneigentlichen Brüche.

§. 20. Da die Rechnungen fast immer benannte Zahlen betreffen, so muß man die Unterabtheilungen der benannten Einheiten in Brüche, und umgekehrt, Brüche in Unterabtheilungen von benannten Einheiten nach Bedürfniß und Willkühr verwandeln können.

Es sollen z. B. 15 kr. in einen Bruch von einem Gulden verwandelt werden. Da der Gulden 60 kr. enthält, so ist dieses eben so viel, als ob gesagt wäre, die Einheit des Geldes ist in 60 Theile getheilt, und 15 solche Theile sollen genommen werden. Man erhält also $\frac{15}{60}$ fl. oder $\frac{1}{4}$ fl. Man sieht wohl, daß dieses Verfahren allgemein ist, und kann sich also daraus die Regel ziehen: Irgend eine Zahl von geringerer Benennung wird in einen Bruch von einer Einheit der nächst höhern Benennung verwandelt, wenn man die gegebene Zahl als Zähler ansetzt, und als Nenner die Anzahl der Einheiten der niedrigern gegebenen Benennung, welche eine Einheit der nächst höheren Benennung ausmachen.

Nach dieser Regel sind z. B. 12 Loth, so viel als $\frac{12}{32}$ ℔. oder $\frac{3}{8}$ ℔.; denn 12 ist die Zahl der gegebenen Benennung, und bildet den Zähler; ein Pfund aber enthält 32 Loth, und diese Zahl bildet also den Nenner.

Es wird aber sehr oft nothwendig, eine Zahl von irgend einer untergeordneten Benennung nicht in einen Bruch von einer Einheit der nächsthöhern Benennung zu verwandeln, sondern in einen Bruch von einer Einheit, deren Benennung nicht die nächsthöhere ist. Es soll z. B. 3 pf. in einen Bruch von einem Gulden verwandelt werden. Da nun

der Gulden 60 kr. und 1 Kreuzer 4 pf. hat, so hat der Gulden 240 pf., und 3 pf. sind also eben so viel als $\frac{3}{240}$ fl. oder $\frac{1}{80}$ fl. Es sind aber auch 3 pf. so viel als $\frac{3}{4}$ kr. Da nun 1 kr. so viel ist als $\frac{1}{60}$ fl., so hat man so viele $\frac{1}{60}$ fl. als man Kreuzer hat. In dem gegebenen Beyspiele aber hat man $\frac{3}{4}$ kr. Man muß folglich $\frac{3}{4}$ und $\frac{1}{60}$ miteinander multipliciren, und dieses giebt $\frac{1}{80}$ fl., wie zuvor.

Es soll ferner 6 kr. 3 pf. in einen Bruch von einem Gulden verwandelt werden. Da nun 6 kr. so viel als $\frac{6}{60}$ fl. oder $\frac{1}{10}$ fl., und gemäß dem vorigen Beyspiel 3 pf. so viel als $\frac{1}{80}$ fl. sind, so hat man die Brüche $\frac{1}{10}$ und $\frac{1}{80}$ zu addiren, und erhält $\frac{9}{80}$ fl. Da aber 6 kr. auch so viel als 24 pf. sind, so machen 6 kr. 3 pf. in allem 27 pf. aus, und man erhält $\frac{27}{240}$ fl. oder $\frac{9}{80}$ fl. Ferner ist noch 6 kr. 3 pf. so viel als $6\frac{3}{4}$ kr., oder $\frac{27}{4}$ kr., und um einen Bruch von einem Gulden zu erhalten, müssen die Brüche $\frac{27}{4}$ und $\frac{1}{60}$ multiplicirt werden, wodurch man wieder $\frac{9}{80}$ fl. erhält.

Man kömmt also im Allgemeinen auf zweyerley Regeln, von welchen man in jedem vorkommenden Falle diejenige anwendet, welche schneller und mit kleineren Zahlen zum Resultate führt. Diese Regeln sind:

1) Man setzt die gegebene Zahl als Zähler an, als Nenner aber das Product aus allen Unterabtheilungen von der verlangten Benennung bis zur gegebenen. Sind Zahlen aus verschiedenen Unterabtheilungen gegeben, so werden die Brüche, die man durch die eben ausgesprochene Regel erhält, auf gleiche Benennung gebracht, und addirt.

Es seyen z. B. 3 Zoll und 4 Linien Duodecimalmaß gegeben, und es soll angegeben werden, welchen Bruch von einer Klafter sie ausmachen, so sind nach der obigen Regel

$$3 \text{ Zoll so viel als } \frac{3}{6 \, . \, 12} \text{ Klafter, oder } \frac{1}{24} \text{ Klafter}$$

$$\text{und 4 Linien so viel als } \frac{4}{6 \, . \, 12 \, . \, 12} \text{ Klafter, oder } \frac{1}{216} \text{ Klafter.}$$

Addirt man endlich diese Brüche, so erhält man $\frac{10}{216}$ Klafter, oder $\frac{5}{108}$ Klafter.

2) Wenn Zahlen von mehrern untergeordneten Benennungen vorkommen, so verwandelt man sie einzeln in Zahlen von der höchsten gegebenen Benennung, addirt diese Brüche, und multiplicirt ihre Summe mit dem Bruch, den eine Einheit der höchsten gegebenen Benennung von einer Einheit der gesuchten Benennung ausmacht.

Es sey z. B. verlangt: $2' \, . \, 6'' \, . \, 3'''$ in einen Bruch von einer Klafter zu verwandeln, so sind

$$3''' \text{ so viel als } \frac{3}{12 \, . \, 12} \text{ oder } \frac{1'}{48}$$

und $6''$ so viel als $\frac{6}{12}$ oder $\frac{1}{2}'$.

Man hat also $2'$, $\frac{1}{2}'$ und $\frac{1}{48}'$ zu addiren. Dieses giebt $2\frac{25}{48}$ Schuh, oder $\frac{121}{48}'$. Nun ist aber $1'$ so viel als $\frac{1}{6}$ Klafter, und man muß also die Brüche $\frac{1}{6}$ und $\frac{121}{48}$ miteinander multipliciren, wodurch man $\frac{121}{288}$ Klafter erhält. Es ist also gleichviel, 2 Schuh, 6 Zoll und 3 Linien zu nehmen, oder die Klafter in 288 Theile zu theilen, und 121 solche Theile zu nehmen.

§. 21. Nun ist die umgekehrte Aufgabe zu behandeln, nämlich einen Bruch von irgend einer benannten Einheit durch ihre Unterabtheilungen auszudrücken.

Es soll z. B. $\frac{17}{20}$ fl. in Kreuzern ausgedrückt werden. Da der gegebene Nenner 20, und der gegebene Zähler 17 ist, so heißt dieses so viel, als der Gulden soll in 20 Theile getheilt werden, und man soll 17 solche Theile nehmen. Nun hat aber der Gulden 60 kr., und man soll also 60 kr.

in 20 gleiche Theile theilen. Ein Theil wird folglich 3 kr. Da man nun 17 solche Theile nehmen soll, so macht dieses 17mal 3 kr., oder 51 kr.

Es sollen ferner $\frac{19}{80}$ fl. in Kreuzern und Pfenningen ausgedrückt werden. Da nun 1 Gulden 60 kr. hat, so hat man so vielmal 60 kr., als man Gulden hat. Im gegenwärtigen Falle hat man also $\frac{19}{80}$mal 60 Kreuzer, und also $\frac{57}{4}$ kr., oder $14\frac{1}{4}$ kr., oder 14 kr. 1 pf.

Da dieses Verfahren allgemein ist, so kömmt man auf folgende Regel: Man multiplicirt den Zähler des gegebenen Bruches mit der Anzahl untergeordneter Einheiten, in welchen der gegebene Bruch ausgedrückt werden soll, und welche eine Einheit der gegebenen Benennung ausmachen. Dieses Product wird mit dem gegebenen Nenner dividirt. Der Quotient ist die gesuchte Anzahl untergeordneter Einheiten. Geht diese Division nicht auf, so verfährt man mit dem Rest gerade so in Bezug auf Einheiten von noch niedrigerer Benennung.

Es sollen z. B. $\frac{8759}{12800}$ Centner durch untergeordnete Gewichtstheile ausgedrückt werden. Da nun ein Centner 100 ℔. hat, so erhält man $\frac{875900}{12800}$ ℔. oder $\frac{8759}{128}$ ℔. oder $68\frac{55}{128}$ ℔. Da aber das Pfund 32 Loth hält, so hat man 68 Pfund und $\frac{1760}{128}$ Loth, oder 68 Pfund $13\frac{96}{128}$ Loth, oder 68 Pfund $13\frac{3}{4}$ Loth, oder also 68 Pfund 13 Loth 3 Quent.

Es trifft sich aber sehr oft, daß bey den Einheiten der niedrigsten Benennung noch ein Bruch bleibt, der also durch keinen Theil der benannten Zahlen dargestellt werden kann. Es soll z. B. $\frac{17}{45}$ fl. in Kreuzern und Pfenningen ausgedrückt werden. Gemäß der oben ausgesprochenen Regel erhält man

17
60
1020 | $22\frac{30}{45}$ kr.
45
90
120
45
90
30
45

nämlich $22\frac{30}{45}$ kr., oder $22\frac{2}{3}$ kr. Da der Kreuzer 4 pf. enthält, so sind $22\frac{2}{3}$ kr. so viel als 22 kr. $\frac{8}{3}$ pf., oder 22 kr. $2\frac{2}{3}$ pf. Der Pfenning enthält aber auch noch 2 Heller, und man hat also 22 kr. 2 pf. $\frac{4}{3}$ hl., oder 22 kr. 2 pf. $1\frac{1}{3}$ hl. Da nun der Heller die kleinste Münze ist, so ist $\frac{1}{3}$ Heller nicht bezahlbar. Es frägt sich also, wie man sich in diesem Falle, oder in einem ähnlichen, zu verhalten habe, und es gilt für alle Fälle dieser Art folgende Vorschrift: Wenn der Bruch, welcher bey den Einheiten der niedrigsten Benennung stehen bleibt, kleiner ist als $\frac{1}{2}$, so wird er ganz vernachläßigt, und für nichts gehalten; wenn er aber $\frac{1}{2}$ ausmacht, oder größer ist als $\frac{1}{2}$, so nimmt man statt seiner eine ganze Einheit.

Ob aber ein Bruch größer oder kleiner ist als $\frac{1}{2}$, findet man auf folgende Art: Man dividirt den Nenner mit dem Zähler, ohne Rücksicht darauf, ob diese Division aufgeht oder nicht. Ist nun der Quotient 1, und bleibt noch ein Rest, so ist der Bruch größer als $\frac{1}{2}$. Ist aber der Quotient größer als 1, und bleibt ein Rest, so ist der Bruch kleiner als $\frac{1}{2}$. So ist z. B. $\frac{23}{36}$ größer als $\frac{1}{2}$, denn man hat

36 | 1
23
13

Hingegen ist $\frac{580}{1421}$ kleiner als $\frac{1}{2}$, denn man erhält

$$\begin{array}{r|l} 1421 & 2 \\ 589 & \\ \underline{1178} & \\ 243 & \end{array}$$

In dem oben gewählten Beyspiel sind $\frac{17}{45}$ fl. eben so viel als 22 kr. 2 pf. $1\frac{1}{3}$ hl. Der Bruch, der bey den Einheiten der niedrigsten Benennung, nämlich bey den Hellern stehen bleibt, ist $\frac{1}{3}$, und also kleiner als $\frac{1}{2}$. Er wird folglich völlig vernachläßigt und für nichts gehalten.

Es soll noch ferner $\frac{1567}{1920}$ fl. in Münze ausgedrückt werden. Man erhält zuerst $48\frac{31}{32}$ kr. Der Bruch $\frac{31}{32}$ kr. giebt $3\frac{7}{8}$ pf., und der Bruch $\frac{7}{8}$ pf. giebt $1\frac{3}{4}$ hl. Man erhält also in allem 48 kr. 3 pf. $1\frac{3}{4}$ hl. Da aber der Bruch $\frac{3}{4}$ größer ist als $\frac{1}{2}$, so nimmt man statt seiner einen ganzen Heller. Man erhält damit 48 kr. 3 pf. 2 hl., oder 48 kr. 4 pf., oder endlich 49 kr. Wenn man auf die nämliche Art $\frac{3}{7}$ fl. in Münze verwandelt, erhält man 25 kr. 2 pf. $1\frac{5}{7}$ hl. Da aber $\frac{5}{7}$ größer ist als $\frac{1}{2}$, so setzt man statt $\frac{5}{7}$ hl. einen ganzen Heller, und erhält dadurch 25 kr. 3 pf.

§. 22. Obschon es an und für sich gleichgültig ist, Brüche anzuwenden oder die Unterabtheilungen der benannten Zahlen, so erfordert doch sehr oft die Bequemlichkeit der Rechnung und die Kürze und Gleichförmigkeit, bey den Brüchen zu bleiben. Wenn aber diese in Zähler und Nenner mit vielen Ziffern geschrieben werden, sind sie wieder unbequem. Wenn z. B. in irgend einer Aufgabe mehrere Brüche addirt werden müssen, so wird sehr oft der Bruch, den man als Summe erhält, in Zähler und Nenner mit großen Zahlen geschrieben, und es wäre dann zu wünschen, den Bruch ohne Veränderung seines Werthes durch kleinere Zahlen ausdrücken zu können.

Zu diesem Zweck führet die Art, wie man den größten gemeinschaftlichen Divisor zwischen Zähler und Nenner aufsucht, und welche in §. 13. erklärt ist. Man erhält nämlich bey dieser Operation eine Reihe von Quotienten, aus welchen sich Brüche bilden lassen, deren letzter jedesmal der gegebene ist. Das Verfahren ist folgendes:

1) Man schreibt die erhaltenen Quotienten, in der Ordnung, wie sie erschienen sind, untereinander, und zieht rechts neben ihnen einen stehenden Strich, und über ihnen von der linken zur rechten einen wagerecht liegenden Strich.

2) Nun bildet man zwey stehende Columnen, indem man in einiger Entfernung von dem ersten stehenden Strich einen zweyten zieht.

3) Man schreibt über dem wagerechtliegenden Strich in die erste Columne 1, und in die zweyte 0; unter den Strich aber, also in einer Linie mit dem ersten Quotienten, in die erste Columne 0, und in die zweyte 1.

4) Nun wird fortwährend der an der Seite stehende Quotient mit der Zahl neben ihm in der ersten Columne multiplicirt, und die darüber stehende Zahl addirt. Diese Zahlen sind Zähler. Auf gleiche Weise wird jeder Quotient mit der Zahl in der zweyten Columne, die mit ihm auf einer Linie steht, multiplicirt, und die darüber stehende Zahl addirt. Diese Zahlen geben die Nenner, so daß die zusammengehörigen Zähler und Nenner neben einander stehen.

Man hat z. B. in §. 13. die Quotienten erhalten: 1, 3, 1, 1, 1, 10. Verwendet man diese, wie eben erklärt wurde, so ist die Operation folgende:

1

	1	0
1	0	1
3	1	1
1	3	4
1	4	5
1	7	9
10	11	14
	117	149

Man hat nun hier die Brüche $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{11}{14}$, $\frac{117}{149}$. Diese Brüche besitzen die Eigenschaft, daß sie nicht viel von einander verschieden sind, und zwar wird dieser Unterschied bey jedem folgenden Paare kleiner. Man findet ferner, daß diese Brüche abwechselnd zu groß und zu klein sind; nämlich

$\frac{4}{5}$ ist größer als $\frac{3}{4}$ um $\frac{1}{20}$
$\frac{4}{5}$ . . . $\frac{7}{9}$. $\frac{1}{45}$
$\frac{11}{14}$ . . . $\frac{7}{9}$. $\frac{1}{126}$
$\frac{11}{14}$ . . . $\frac{117}{149}$. $\frac{1}{2086}$.

Gesetzt es sey $\frac{2009}{3429}$ fl. gegeben. Sucht man nun den gemeinschaftlichen Divisor auf, so erhält man die Quotienten 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 1, 1, 4, und nun wird die Operation folgende:

	1	0
1	0	1
1	1	1
2	1	2
2	3	5
2	7	12
3	17	29
3	58	99
1	191	326
1	249	425
4	440	751
	2009	3429

Drückt man nun alle diese Brüche in Münze aus, so sieht man, wie schnell die Unterschiede der einzelnen Brüche unbedeutend werden.

$\frac{1}{2}$ fl. macht 30 kr.
$\frac{3}{5}$. 36 kr.
$\frac{7}{12}$. 35 kr.
$\frac{17}{29}$. 35 kr. — pf. 1 $\frac{11}{29}$ hl.
$\frac{58}{99}$. 35 kr. — pf. 1 $\frac{7}{33}$ hl.
$\frac{191}{326}$. 35 kr. — pf. 1 $\frac{37}{163}$ hl.
$\frac{249}{425}$. 35 kr. — pf. 1 $\frac{19}{85}$ hl.
$\frac{440}{751}$. 35 kr. — pf. 1 $\frac{169}{751}$ hl.
$\frac{2009}{3429}$. 35 kr. — pf. 1 $\frac{771}{3429}$ hl.

Da nun alle Brüche, welche hier bey den Hellern stehen bleiben, viel kleiner sind, als $\frac{1}{2}$, so werden sie alle vernachläßigt, und für nichts gehalten, und es ist also $\frac{17}{29}$ fl. eben so viel, als $\frac{2009}{3429}$ fl. Der Bruch $\frac{17}{29}$ fällt aber noch in keiner Rechnung beschwerlich, während der gegebene Bruch $\frac{2009}{3429}$ immer unbequem ist.

Es sollen als zweytes Beyspiel folgende Brüche addirt werden: $\frac{5}{7}$, $\frac{9}{13}$, $\frac{11}{17}$, $\frac{23}{29}$, so erhält man

	44863	
$\frac{5}{7}$	6409	32045
$\frac{9}{13}$	3451	31059
$\frac{11}{17}$	2639	29029
$\frac{23}{29}$	1547	35581
		$\frac{127714}{44863}$, oder
		$2\frac{37988}{44863}$.

Sucht man nun bey diesem Bruche den gemeinschaftlichen Divisor auf, so erhält man die Quotienten:

1, 5, 1, 1, 9, 3, 2, 2, 4, 1, 3

und mit diesen erhält man:

Quotienten	Zähler	Nenner
	1	0
1	0	1
5	1	1
1	5	6
1	6	7
9	11	13
3	105	124
2	326	385
2	757	894
4	1840	2173
1	8117	9586
3	9957	11759
	37988	44863

Hier ist $\frac{11}{13}$ seinem Werthe nach von dem Bruch $\frac{37988}{44863}$ nur mehr so wenig verschieden, daß der Unterschied für

nichts zu achten ist. Das Resultat der Addition ist also $2\frac{11}{13}$; denn

$2\frac{11}{13}$ fl. macht 2 fl. 50 kr. $3\frac{1}{13}$ pf.

und

$2\frac{37988}{44863}$ fl. macht 2 fl. 50 kr. $3\frac{9931}{44863}$ pf.

Da nun beyde Brüche, welche bey den Pfenningen stehen bleiben, weit kleiner sind als $\frac{1}{2}$, und daher für nichts angesehen werden, so giebt der Bruch $\frac{11}{13}$ das Resultat vollkommen genau, nämlich 50 kr. 3 pf.

Um nun immer zu wissen, welcher Bruch genau genug ist, hat man folgende Regeln zu beobachten:

1) Wenn die Zahlen unbenannt sind, kann man in allen Fällen da abbrechen, wo ein Quotient viel größer ist, als die vorausgehenden. Wenn man z. B. die Quotienten erhält 2, 3, 1, 4, 19, so wird das Resultat genau genug, wenn man 4 als den letzten Quotienten betrachtet, und 19 gar nicht mehr berücksichtigt.

2) Ist aber kein Quotient vorhanden, der im Vergleich mit den vorhergehenden beträchtlich groß ist, so darf man überhaupt bey demjenigen Bruche aufhören, dessen Zähler und Nenner auf einmal mit mehr Ziffern geschrieben werden, als die vorausgehenden.

3) Rechnet man aber mit benannten Zahlen, so hört man bey demjenigen Bruche auf, dessen Nenner mit dem Nenner des nachfolgenden multiplicirt, eine größere Zahl zum Producte giebt, als diejenige ist, welche die Anzahl der Theile der niedrigsten Benennung ausdrückt, welche eine Einheit der gegebenen Benennung ausmachen. Wenn z. B. von Gulden die Rede ist, so kann man bey jenem Bruche aufhören, dessen Nenner mit dem Nenner des nachfolgenden multiplicirt eine Zahl zum Producte giebt, welche größer ist als 480, weil ein Gulden 480 Heller hält, und für

noch kleinere Theile keine Münze vorhanden ist. Im vorigen Beyspiel folgen die Brüche $\frac{6}{7}$, $\frac{11}{13}$, $\frac{105}{124}$ aufeinander. Aber

7 mal 13 macht 91
13 mal 124 macht 1612.

Da nun 1612 schon viel größer ist, als 480, so ist auch der Bruch $\frac{11}{13}$ für alle Fälle genau genug. Bezöge sich hingegen das vorige Beyspiel auf Centner, und sollte man das Gewicht noch auf Quintchen genau wissen, so würde erst der Bruch $\frac{105}{124}$ Genüge leisten, denn 1 Centner hält 12800 Quintchen, und

13 mal 124 macht 1612
124 mal 385 macht 47740.

Da nun erst 124 mal 385 größer ist als 12800, so darf man auch erst mit dem Bruch $\frac{105}{124}$ aufhören.

Die Decimalbrüche.

§. 23. Decimalbrüche nennt man jene Brüche, deren Nenner aus der Multiplication von lauter Zehnern entstehen, und welche also keine andern Ziffer enthalten, als 1 und eine Anzahl Nullen. Diese Brüche werden also schon dadurch immer auf einerley Nenner gebracht, daß man die Zahl der Nullen in allen Nennern gleich macht, also in Zähler und Nenner so viele Nullen anhängt, bis in allen Nennern gleich viele sind, weil kein Bruch, seinem Werthe nach geändert wird, wenn man ihn in Zähler und Nenner mit 10, 100, 1000, u. s. w. multiplicirt. So ist es z. B. gleichviel, ob man schreibt

$$\frac{3}{10}, \frac{5}{1000}, \frac{7}{10000}$$

oder

$$\frac{3000}{10000}, \quad \frac{50}{10000}, \quad \frac{7}{10000}$$

und nun ist die Summe $\frac{3057}{10000}$.

Ein solcher Bruch kann im Zähler niemals mehr Ziffern haben, als er im Nenner Nullen hat. Zugleich hängt der Werth jeder Ziffer des Zählers davon ab, wie viele Nullen der dazu gehörige Nenner enthält. Wenn z. B. gegeben ist

$$\frac{333}{1000}$$

so hat man $\frac{3}{10}$, $\frac{3}{100}$, $\frac{3}{1000}$.

Der Werth jeder Ziffer des Zählers nimmt also von der Linken gegen die Rechte mit jeder Zifferstelle ums zehnfache ab, wie bey den ganzen Zahlen.

§. 24. Diese Brüche lassen sich also behandeln, wie die ganzen Zahlen, und man braucht immer nur zu wissen, wo sie anfangen, und wie viele Nullen der Nenner enthält. Man läßt daher den Nenner ganz weg, und schreibt bloß den Zähler. Diesen trennt man von den Einheiten der ganzen Zahlen durch ein Comma, oder auch durch einen Punkt. Anstatt also zu schreiben

$$5, \quad \frac{3}{10}, \quad \frac{7}{100}, \quad \frac{8}{1000}$$

schreibt man wirklich 5,378.

Es ist aber nun nothwendig, dem Zähler immer so viele Zifferstellen zu geben, als der Nenner Nullen haben würde. Wenn daher der Zähler zu wenig Ziffern hat, so werden die fehlenden durch Nullen zwischen den Ganzen und den Decimalen ersetzt. So ist z. B.

$$3\,\frac{7}{1000} \text{ so viel als } 3{,}007$$

denn man hat eigentlich

$$3,\ \frac{0}{10},\ \frac{0}{100},\ \frac{7}{1000}.$$

Wenn bloß Brüche allein vorkommen, und kein Ganzes, so wird die Stelle der Ganzen mit Null bezeichnet. Z. B.

$$\frac{7}{10},\ \frac{9}{100},\ \frac{8}{1000} \text{ macht } 0{,}798$$

und

$$\frac{3}{100},\ \frac{7}{10000} \text{ macht } 0{,}0307.$$

Zugleich ist offenbar, daß ein Decimalbruch nicht geändert wird, wenn man ihm rechts beliebig viele Nullen anhängt, denn es ist eben so viel, als hätte man ihn in Zähler und Nenner mit 10, 100, 1000, u. s. w. multiplicirt. Es ist also

0,5 und 0,500

ganz gleichgültig, weil

$$\frac{5}{10} \text{ und } \frac{500}{1000}$$

einerley ist, und immer $\frac{1}{2}$ bedeutet. Wenn man aber links eine Nulle vorsetzt, ist es eben so viel, als hätte man den Bruch mit 10 dividirt, und also den Werth desselben 10 mal kleiner gemacht; denn

$$0{,}5 \text{ ist } \tfrac{5}{10} \text{ oder } \tfrac{1}{2}$$
$$0{,}05 \text{ = } \tfrac{5}{100} \text{ = } \tfrac{1}{20}.$$

§. 25. Wenn nun Decimalen addirt oder subtrahirt werden sollen, so werden sie ganz nach denjenigen Regeln behandelt, welche für ganze Zahlen gelten. Man schreibt daher alle Stellen von gleichem Werthe gerade untereinander, und addirt oder subtrahirt, wie bey ganzen Zahlen, nur muß an der Summe oder am Reste das Comma wieder an seine gehörige Stelle geschrieben werden. Z. B.

0,5	1,003	9,2087	0,95674
0,57	2,0506	8,9765	0,89879
3,9875	0,97	0,2322	0,05795
5,0575	3,9008		
	7,9244		

Man hat also bey der Addition und Subtraction vorzüglich nur beym Anschreiben darauf zu sehen, daß alle Comma gerade unter einander stehen. Uebrigens verfährt man, wie bey ganzen Zahlen.

§. 26. Um die Regel für die Multiplication zu finden, wende man zuerst die Regeln, welche für gemeine Brüche gelten, an, indem man vor der Hand die Nenner wirklich ansetzt. Dann wird z. B.

$$\frac{7}{100} \times \frac{5}{1000} = \frac{35}{100000}$$

Wenn also 0,07 mit 0,005 multiplicirt wird, so erhält man als Product 0,00035.

Die Multiplication der Zähler geschieht also wie bey ganzen Zahlen. Der Nenner des Productes aber enthält jedesmal so viele Nullen, als die Nenner der Factoren miteinander enthalten. Da nun diese Nullen die Anzahl der Decimalstellen bestimmen, so folgt die Regel: „Decimalen werden mit Decimalen gerade so multiplicirt, wie ganze Zahlen; nach der Multiplication aber werden am Producte von der Rechten gegen die Linke so viele Ziffer als Decimalen abgeschnitten, als die Factoren mit einander enthalten.“ Z. B.

0,345	2,30856	628,45
0,00246	0,00304	0,3256
2070	923424	377070
1380	692568	314225
690	0,0070180224	125690
0,00084870		188535
		204,623320

Gemeine Brüche werden mit Decimalen multiplicirt, wie man ganze Zahlen mit Brüchen multiplicirt, nämlich man multiplicirt bloß den Zähler des gemeinen Bruches mit dem gegebenen Decimalbruch nach den eben gegebenen Regeln, und setzt den Nenner wieder unter das Product. Z. B.

$$\frac{7}{15} \times 0{,}34 \text{ macht } \frac{2{,}38}{15}$$

$$\frac{3}{11} \times 2{,}09 \text{ macht } \frac{6{,}27}{11}.$$

§. 27. Um die Regel der Division zu finden, lasse man ebenfalls zuerst an den Decimalbrüchen den Nenner stehen, und wende die Regel an, welche für gemeine Brüche gilt. Dabey entstehen drey Fälle, nämlich:

1) $\frac{848}{1000} : \frac{16}{100}$ giebt $\frac{848}{1000} \times \frac{100}{16}$ oder $\frac{53}{10}$ oder $5\frac{3}{10}$ und also 5,3.

Schreibt man nun Dividend und Divisor ohne Nenner, so wird $\frac{0{,}848}{0{,}16}$ gleich 5,3.

Hier sind im Dividend mehr Decimalen als im Divisor, und aus dem obigen Verfahren folgt die Regel: „Die Division wird verrichtet, wie in ganzen Zahlen; im Quotienten aber werden so viele Decimalen abgeschnitten, als im Dividende mehr stehen, als im Divisor.“ Wenn z. B. gegeben ist

$$\frac{0{,}00084816}{0{,}0008}$$

so wird der Quotient 1,0602.

Es folgt übrigens aus dem früheren, daß man dem Dividende Nullen anhängen darf. Z. B.

$\frac{0{,}01}{0{,}16}$ ist eben so viel als $\frac{0{,}010000}{0{,}16}$.

Dividirt man nun, so wird der Quotient

0,0625.

2) Der zweyte Fall, der bey der Division vorkommen kann, besteht darin, daß Dividend und Divisor gleich viele Decimalen enthalten. In diesem Falle haben also Dividend und Divisor gleiche Nenner, und man findet den Quotienten durch die Division der Zähler, als ob sie ganze Zahlen wären. Wenn z. B.

$$\frac{0{,}848}{0{,}016}$$

verlangt ist, so hat man eigentlich

$$\frac{848}{1000} : \frac{16}{1000}$$

und folglich

$$\frac{848}{16} \text{ oder } 53.$$

Wenn man also in diesem Falle dem Dividende keine Nullen anhängt, so giebt die Division gar keine Decimalen, sondern lauter Ganze. Hängt man aber dem Dividende Nullen an, so kömmt man damit auf den ersten Fall zurück. Z. B.

$$\frac{0{,}02}{0{,}08} \text{ ist eben so viel als } \frac{0{,}0200}{0{,}08}$$

und nun wird der Quotient

$$0{,}25.$$

3) Der dritte Fall ist endlich vorhanden, wenn im Dividende weniger Decimalen stehen, als im Divisor. Es hat folglich das Dividend einen kleineren Nenner als der Divisor, und man bringt den gegenwärtigen Fall auf den zweyten oder ersten zurück, wenn man dem Dividende Nullen anhängt. Wenn z. B.

$$\frac{0{,}1696}{0{,}000016}$$

verlangt ist, so ist dieses eben so viel als

$$\frac{0{,}16960000}{0{,}000016}$$

und nun erhält man 10600,00; denn man hat eigentlich

$$\frac{1696}{10000} : \frac{16}{1000000} = \frac{1696000000}{160000} = \frac{169600}{16}$$

oder 10600.

Es sey ferner verlangt

$$\frac{36}{0,128}$$

so ist dieses eben so viel als

$$\frac{36,00000}{0,128}$$

und nun giebt die wirkliche Division

281,25.

Es gelten folglich die gefundenen Regeln auch in allen jenen Fällen, in welchen ganze Zahlen und Decimalen vermischt vorkommen.

§. 28. Um einen gemeinen Bruch in einen Decimalbruch zu verwandeln, hat man sich vorzustellen, daß Zähler und Nenner für sich ganze Zahlen sind, und daß der Zähler ein Dividend, der Nenner aber ein Divisor ist. Es läßt sich folglich der Zähler immer so betrachten, als bestehe er aus einer ganzen Zahl, und einer beliebigen Menge von Decimalen, welche alle Null sind. Schreibt man also diese, so läßt sich wirklich dividiren, und der Quotient ist der gesuchte Decimalbruch. Z. B. $\frac{3}{8}$ ist eben so viel als $\frac{3,000}{8}$, und nun giebt die Division 0,375, und wirklich ist auch $\frac{3}{8}$ und $\frac{375}{1000}$ gleichviel. Es soll noch $\frac{52}{256}$ in einen Decimalbruch verwandelt werden. Schreibt man nun

$$\frac{52,000000}{256}$$

so läßt sich dividiren, und man erhält 0,203125, und es ist also

$$\frac{52}{256} \text{ gleich } 0{,}203125 \text{ oder } \frac{203125}{1000000}.$$

Man kann sich die Verwandlung der gemeinen Brüche in Decimalbrüche auch noch auf folgende Art vorstellen. Wenn der Bruch

$$\frac{52}{256}$$

gegeben ist, so wird er nicht geändert, wenn man ihn in Zähler und Nenner mit irgend einer Zahl dividirt. Man dividire ihn also mit 1000, so erhält man

$$\frac{0{,}052}{0{,}256}.$$

Nun aber hat man eine bloße Division von Decimalen mit Decimalen, bey welcher man dem Dividende beliebig viele Nullen anhängen darf.

§. 29. Da bey der Verwandlung der gemeinen Brüche in Decimalbrüche die Division sehr häufig entweder gar nicht aufgeht, oder doch erst nach sehr vielen Ziffern, so ist man genöthigt, die Division irgendwo abzubrechen. Wenn z. B. $\frac{2}{3}$ in einen Decimalbruch verwandelt wird, so erhält man 0,6666666 . . . . Die Division geht in diesem Falle niemals auf, und jede Ziffer der Quotienten ist 6. Es ist folglich nicht möglich, einen solchen Bruch genau durch einen Decimalbruch auszudrücken, und man richtet sich daher nach dem Grade von Genauigkeit, den die jedesmalige Aufgabe verlangt. Es ist oft genau genug, die Einheit in tausend Theile zu theilen, und dann sind drey Decimalstellen hinreichend. Oft aber ist es nöthig, die Einheit in hunderttausend oder eine Million Theile zu theilen, und dann hat man fünf oder sechs Decimalstellen nöthig. So oft man aber die Division endet, muß man zu-

erst wissen, wie groß die erste weggeworfene Ziffer ist. Wenn nämlich diese 5 oder mehr als 5 beträgt, so ist sie größer als eine halbe Einheit der beybehaltenen letzten Ziffernstelle, und man vermehrt also diese um eine ganze Einheit; wenn aber die erste vernachläßigte Ziffer kleiner ist, als 5, so beträgt sie weniger als eine halbe Einheit der beybehaltenen Ordnung, und wird daher für Nichts angesehen. Es ist also z. B.

$$\frac{1}{3} = 0,33333 \ldots\ldots$$

wobey die letzte Ziffer nicht vermehrt wird, hingegen ist

$$\frac{2}{3} = 0,666667$$

weil die erste vernachläßigte Ziffer immer 6 ist, und daher die letzte beybehaltene immer um 1 vermehrt wird.

§. 30. Bey der Verwandlung der gemeinen Brüche in Decimalbrüche zeigt sich ein besonderer Unterschied zwischen denjenigen, bey welchen die Division aufgeht, und zwischen denen, bey welchen sie nicht aufgeht. Bey den letzteren erhält man nämlich eine Reihe Ziffer, und dann erscheint die nämliche Reihe wieder, und zwar immer wieder ohne Ende fort. Diese Reihe Ziffer nennt man eine Periode, und solche Decimalbrüche nennt man periodische. So ist z. B.

$$\frac{3}{7} = 0,428571 \ldots\ldots\ldots$$

Hier bestehet die Periode aus den oben stehenden sechs Ziffern, welche ohne Ende fort immer wieder erscheinen. Eben so giebt $\frac{2}{3}$ einen periodischen Decimalbruch; nur besteht dabey die Periode aus einer einzigen Ziffer, nämlich 6, welche ohne Ende fort immer wieder erscheint. Die meisten dieser Perioden bestehen aber aus weit mehr Ziffern, als man selbst in den genauesten Rechnungen braucht. So z. B. geben alle Brüche, welche die Zahl 17 zum Nenner haben, eine Periode von 16 Ziffern, und alle Brüche, welche 19 zum Nenner haben, eine Periode von 18 Ziffern. Der

Nenner 107 führt auf eine Periode von 53 Ziffern. Ueberhaupt kann die Periode aufs höchste so viele Ziffer haben, als der Nenner Einheiten enthält weniger eine.

Da die Division bey Verwandlung aller jener Brüche aufgeht, deren Nenner bloß aus den Zahlen 2 oder 5, oder beyden zugleich entstehen, so geben alle Brüche, deren Nenner aus anderen Zahlen entstehen, periodische Decimalbrüche. So ist z. B.

$$\frac{5}{8} = 0{,}625$$

weil der Nenner 8 bloß aus der Zahl 2 entsteht. Hingegen ist z. B.

$$\frac{7}{11} = 0{,}636363 \ldots\ldots\ldots$$

weil der Nenner 11 weder aus 2 noch aus 5 entsteht. Obwohl nun solche Decimalbrüche eigentlich erst dann hinlänglich ausgedrückt wären, wenn ihre ganze Periode angesetzt ist, so ist doch dieses selten auszuführen, weil die Menge der Ziffer unnütz groß würde.

§. 31. Bey der Verwandlung der Decimalbrüche in gemeine Brüche, sind drey Fälle möglich, nämlich: 1) Entweder ist der Decimalbruch aus einem gemeinen Bruche entstanden, bey welchem die Division aufgeht, oder 2) er ist aus einem gemeinen Bruche entstanden, bey welchem die Division nicht aufgeht, wobey man aber die ganze Periode kennt, oder endlich 3) man kennt die Periode nicht.

Im ersten Falle wird der Decimalbruch bloß mit seinem Nenner versehen, und dann der so gebildete gemeine Bruch verkleinert, indem man den größten gemeinschaftlichen Divisor sucht.

Es sey z. B. gegeben

$$0{,}06640625$$

so hat man zuerst

$$\frac{6640625}{100000000}$$

und nun erhält man

		1	0
100000000	15	0	1
6640625			
33593750			
6640625			
33203125			
390625	17	1	15
2734375			
390625			
2734375		17	256
0			

Der gegebene Decimalbruch führt also auf den gemeinen Bruch $\frac{17}{256}$.

Im zweyten Falle setzt man die ganze Periode des Decimalbruchs als Zähler an, und als Nenner eine Zahl, welche aus eben so vielen Nennern besteht, als die Periode Zifferstellen einnimmt, und verkleinert den so gebildeten gemeinen Bruch. Es sey z. B. gegeben

0,6930693 . . . . . .,

so erhält man zuerst

$$\frac{693}{9999}$$

und folglich

		1	0
9999	14	0	1
693			
3069			
693			
2772			
297	2	1	14
594			
99	3	2	29
297			
0		7	101

Der gemeine Bruch, aus welchem der gegebene Decimalbruch entstanden ist, wird also

$$\frac{7}{101}$$

Es sey ferner gegeben 0,428571428571 . . . ., so erhält man zuerst

$$\frac{428571}{999999}$$

und folglich

		1	0
999999	2	0	1
428571			
857142			
142857	3	1	2
428571		3	7
0			

Der gesuchte gemeine Bruch ist also $\frac{3}{7}$ genau.

Zuweilen fängt aber die Periode erst nach einer oder mehrern andern Ziffern an, die nicht zur Periode gehören. Es sey z. B. gegeben

0,250693 0693 . . . .

In diesem Falle trennt man den gegebenen Bruch in zwey Brüche, wovon der eine alle Ziffer enthält, welche nicht zur Periode gehören, der andere aber die periodischen. In dem angesetzten Beyspiel erhält man

0,25

0,0006930693 . . . . . .

Nun verwandelt man beyde in gemeine Brüche, und addirt sie. Hier giebt der erste

$\frac{25}{100}$ oder $\frac{1}{4}$

Bey dem zweyten ist die Periode 0693, und man erhält

$$\frac{693}{9999}$$

Da aber noch zwey Decimalstellen vorausgehen, so ist der Bruch mit 100 dividirt, und man erhält also

$$\frac{693}{999900} \quad \text{oder} \quad \frac{7}{10100}$$

Nun hat man $\frac{1}{4}$ und $\frac{7}{10100}$ zu addiren. Dieses giebt

	10100	
$\frac{1}{4}$	2525	2525
$\frac{7}{10100}$	1	7
		$\frac{2532}{10100} = \frac{633}{2525}$

Im dritten Falle endlich, wenn man nämlich die Periode nicht kennt, wird bloß der gegebene Decimalbruch mit seinem Nenner versehen, und man sucht den gemeinschaftlichen größten Divisor. Es sey z. B. gegeben

$$0{,}8947368$$

Wenn nun nichts weiter gegeben ist, so kann man nicht wissen, ob dieser Bruch vollkommen geschlossen oder periodisch ist, und ob man etwa die Periode schon kennt. Die Operation wird also

		1	0
10000000	1	0	1
8947368			
1052632	8	1	1
8421056			
526312	2	8	9
1052624			
8	65789	17	19
		1118421	1250000

Hier giebt der Bruch $\frac{17}{19}$ den gegebenen Decimalbruch genau mit allen seinen Ziffern, und folglich kann man $\frac{17}{19}$

anstatt

anstatt des gegebenen Decimalbruches setzen. Entwickelt man aber $\frac{17}{19}$ in einen Decimalbruch, so enthält dieser eine Periode von 18 Ziffern, wovon die ersten sieben die gegebenen sind, und man darf also annehmen, der gegebene Bruch sey wirklich der nämliche, nur sey seine Periode nicht ganz gegeben.

§. 32. Aus allem vorausgehenden folgt, daß in Rechnungen nur selten Decimalbrüche vorkommen können, welche vollständig mit allen ihren Ziffern erscheinen. Man rechnet mit irgend einer bestimmten Anzahl von Decimalziffern, z. B. fünf oder sieben, je nachdem die verlangte Genauigkeit der Aufgabe es mit sich bringt. Wenn aber nun Multiplicationen und Divisionen vorfallen, und die gebrauchten Zahlen alle, oder doch die meisten mit Decimalen versehen sind, so wird ein großer Theil der Rechnung vergeblich gemacht. Wenn z. B. drey Zahlen miteinander multiplicirt werden, wovon jeder sieben Decimalen enthält, so stehen im Producte ein und zwanzig, und da man nach vollendeter Rechnung doch auch nur wieder sieben behalten will, so ist mehr als die halbe Rechnung vergeblich gemacht. Um dieser Unbequemlichkeit zu begegnen, bringt man in der Multiplication und Division Verkürzungen an, welche es möglich machen, nur so viele Decimalen zu gebrauchen, als man im letzten Resultate zu behalten gedenkt.

Die Verkürzung der Multiplication beruhet auf folgenden Umständen. Bey der gewöhnlichen Multiplication fängt man mit den Ziffern vom niedrigsten Werthe an, und hört mit den Ziffern vom höchsten Werthe auf. Es werden folglich die Producte aus den einzelnen Zifferstellen von der Rechten gegen die Linke geordnet, und immer um eine Zifferstelle weiter gerückt. Dieses Verfahren aber läßt sich offenbar auch umkehren. Man kann mit den Ziffern vom

höchsten Werthe die Multiplication anfangen, und mit der Ziffer vom niedrigsten enden. Dabey werden die Producte aus den successiven Ziffern von der Linken gegen die Rechte geordnet. Man erhält also hier jene Zeile als erste, welche bey der gemeinen Multiplication als letzte erscheint, und diejenige als letzte, welche bey der gemeinen Multiplication als erste erhalten wird. Z. B. es soll 7624 mit 5328 multiplicirt werden, so erhält man folgende zweyerley Operationen:

```
     7624           7624
     5328           5328
    ─────          ─────
    60992          38120
   15248            22872
  22872              15248
 38120                60992
 ────────        ────────
 40620672        40620672.
```

Man erhält also auf die letztere Weise überhaupt alle Ziffern vom größeren Werth früher, als die Ziffern vom geringeren. Sind folglich die gebrauchten Zahlen Decimalen, so kann man während der Multiplication alle jene vernachlässigen, welche keinen Einfluß auf diejenigen Ziffer haben, die man im Resultate behalten will. Z. B.

```
0,62345
0,23452
───────
0,12469 | 0
   1870 | 35
    249 | 380
     31 | 1725
      1 | 24690
─────── | ─────
0,14621 | 14940
```

Will man nun im Resultate nur fünf Decimalen behalten, so bleiben alle Ziffer ohne Einfluß, welche rechts von dem stehenden Striche sich befinden. Die angeschriebene

Multiplication läßt sich aber in folgende theilweisen Multiplicationen zerlegen, nämlich

1)	0,62345	×	0,2	giebt	0,124690
2)	0,62345	×	0,03	=	0,0187035
3)	0,62345	×	0,004	=	0,00249380
4)	0,62345	×	0,0005	=	0,000311725
5)	0,62345	×	0,00002	=	0,0000124690

Das erste dieser Producte giebt sechs Decimalen, weil man fünf Decimalen mit einer multiplicirt. Da man aber nur fünf behalten will, so dürfen nur vier multiplicirt werden; man multiplicirt aber die fünfte noch, um zu erfahren, wie viele Einheiten auf die vorausgehende hinüberfallen. Man erhält folglich 0,12469. Bey der zweyten Multiplication ist der Multiplicator 0,03. Man multiplicirt also mit zwey Decimalen. Damit also das Product nur fünf enthält, dürfen nur drey multiplicirt werden. Man hat also nur 0,623 mit 0,03 wirklich zu multipliciren. Man multiplicirt aber 0,6234, um zu finden, wie viele Einheiten noch herüber addirt werden müssen. Im fünften und letzten Producte ist der Multiplicator 0,00002. Um nun fünf Decimalen zu behalten, dürfen die eben angesetzten fünf mit keiner mehr multiplicirt werden. Man multiplicirt aber noch 0,6, um zu finden, wie viele Einheiten zur Addition in der fünften Decimalstelle bleiben. Beträgt bey dieser Rechnung eine weggeworfene Ziffer 5, oder mehr als 5, so wird für sie ebenfalls eine Einheit addirt. Das angesetzte Beyspiel wird also nun auf folgende Art gerechnet:

0,62345	oder	0,23452
0,23452		0,62345
0,12469		0,14071
1870		469
249		70
31		9
1		1
0,14620		0,14620

Es sey ferner gegeben

2,3469782	3,5487648
3,5487648	2,3469782
7,0409346	7,0975296
1,1734891	1,0646294
938791	1419506
187758	212926
16428	31938
1480	2484
94	283
18	7
8,3288734	8,3288734

Ferner

7,0067329	0,9098762
0,9098762	7,0067329
6,3060596	6,3691334
630606	54592
56054	6369
4904	273
420	18
14	8
6,3752594	6,3752594

Wenn Ganze und Decimalen vermischt vorkommen, wird die Multiplication mit den Ganzen gewöhnlich ohne Vernachläßigung der letzten Decimalen gemacht. Wenn aber die ganzen Zahlen mehrere Zifferstellen einnehmen, so werden die theilweisen Producte rechts geordnet, um nicht zwey Additionen zu erhalten. Z. B.

```
      724,3689765              246,0087009
      246,0087009              724,3689765
  ———————————————          ———————————————
  144873,79530             172206,09063
   28974,759060              4920,174018
    4346,2138590              984,0348036
       5,7949518               73,8026103
         5070582               14,7605220
            6519                1,9680696
  ———————————————                 2214078
  178201,0708809                   172206
                                    14760
                                     1230
                           ———————————————
                           178201,0708809
```

§. 33. Wenn eine Decimalzahl mit einer andern Decimalzahl dividirt werden soll, so kann man sich vorstellen, das Dividend sey zuerst wirklich durch Multiplication entstanden. Das Dividend ist also so zu betrachten, als wäre der Decimalbruch, den es enthält unvollständig. Gesetzt das Dividend enthalte sieben Decimalen, und der Divisor eben so viele, und es soll auch der Quotient mit sieben Decimalen gefunden werden. Man müßte also nun dem Dividende sieben Nullen anhängen, damit es 14 Decimalen enthält. Diese sieben angehängten Nullen sind aber nicht richtig, denn im Dividende würden andere Ziffer stehen, wenn der Bruch mit 14 Decimalen gegeben wäre. Anstatt also 14 Decimalen mit sieben Decimalen zu dividiren, um auch im Quotienten sieben zu erhalten, verfährt man auf folgende Weise: Wenn Dividend und Divisor gleich viele Decimalen enthalten, wird der Quotient eine ganze Zahl, und diese kann auch Null seyn. Nun läßt man die letzte Ziffer des Divisors weg, anstatt daß man dem Dividende eine Nulle hinzufügt. Wenn also das Dividend sieben Decimalen hat, so hat nun der Divisor sechs, und der Quotient wird folglich die erste Decimale. Auf die nämliche Art fährt man fort immer vom Divisor eine Ziffer wegzulassen,

anstatt dem Dividende eine Nulle zuzusetzen. Das Dividend behält also immerfort gleich viele Decimalen, während der Divisor immer weniger enthält. Wenn der Divisor mit dem Quotienten multiplicirt wird, multiplicirt man auch noch die weggeworfene Ziffer, um zu finden, wie viele Einheiten auf die behaltenen herüberfallen. So wird fortgefahren, bis alle Ziffer des Divisors verbraucht sind. Z. B.

```
0,8639787 |
0,9586236 |  0,9012701
---------
0,8639787
 0,9586236
0,8627612
---------
0,0012175
   0,958623
0,0009586
---------
0,0002589
     0,9586
0,0001917
---------
0,0000672
      0,958
0,0000671
---------
0,0000001
       0,958
0,0000001
---------
    0
```

Probe.

```
0,9586236
0,9012701
---------
0,8627612
     9586
     1917
      671
        1
---------
0,8639787
```

2tes Beyspiel.

0,5623409 0,0085096	66,08312

0,510576
____
0,0517649
0,0085096
0,0505766
____
0,0007073
0,0085096
0,0006807
____
0,0000266
0,00850
0,0000255
____
0,0000011
0,0085
0,0000009
____
0,0000002
0,008
0,0000002
____
0,0000000

Probe.

0,0085096	66,08312
66,08312	0,0085096
0,510576	0,5286650
510576	330416
6807	5947
255	396
9	0,5623409
2	
0,5623409	

3tes Beyspiel.

0,0085096	0,0151325
0,5623409	
0,0056234	
0,0028862	
0,56234	
0,0028117	
0,0000745	
0,5623	
0,0000562	
0,0000183	
0,562	
0,0000169	
0,0000014	
0,56	
0,0000011	
0,0000003	
0,5	
0,0000003	
0,0000000	

Probe.

0,5623409	0,0151325
0,0151325	0,5623409
0,0056234	0,0075663
28117	9079
562	303
169	45
11	6
3	0,0085096
0,0085096	

Und endlich mag noch als vermischtes Beyspiel folgende Aufgabe dienen.

0,0099764 × 87,9234872
0,0869754 × 79,0076982

Das Product des Zählers wird

87,9234872
0,0099764
0,7913113
791311
61546
5275
352
0,8771597

Das Product des Nenners wird

79,0076982
0,0869754
6,3206158
4740461
711068
55305
3950
316
6,8717258

Nun wird die Division folgende:

```
0,8771597        |   0,1276477
  6,8717258      |
0,6871726
---------
0,1899871
   6,871725
0,1374345
---------
0,0525526
    6,87172
0,0481020
---------
0,0044506
     6,8717
0,0041230
---------
0,0003276
      6,871
0,0002748
---------
0,0000528
       6,87
0,0000481
---------
0,0000047
        6,8
0,0000048
---------
```

Verhältnisse und Proportionen.

§. 34. Wenn vier Zahlen so beschaffen sind, daß der Quotient aus einem Paare dem Quotienten aus dem andern Paare gleich ist, so stehen diese Zahlen in einer besondern Beziehung zu einander, und man sagt dann, es verhalten sich die zwey ersten gerade so zu einander, wie sich die zwey letzten verhalten. Es seyen z. B. die Zahlen, 15, 5, 21, 7 gegeben, so erhält man 3 als Quotient, wenn man die erste mit der zweyten, oder die dritte mit der vierten dividirt. Es ist also die erste Zahl das dreyfache von der zweyten, und eben so ist die dritte das dreyfache von

der vierten. Es verhält sich also die erste Zahl zur zweyten gerade so, wie sich die dritte zur vierten verhält. Man pflegt nun dieses auf folgende Art zu schreiben:

$$15 : 5 = 21 : 7$$

Dieser ganze Ausdruck heißt eine Proportion; und diese besteht also aus zwey Verhältnissen, welche sich gleich sind.

Da es nur darauf ankömmt, daß zwey Zahlen den nämlichen Quotienten geben, den zwey andere geben, so folgt, daß sich jedesmal so viele Paare von Zahlen angeben lassen, als man nur immer will, welche alle in demselben Verhältnisse stehen. Soll z. B. wie oben, immer eine Zahl das dreyfache von einer andern seyn, so sind unendlich viele solche Verhältnisse möglich; z. B.

6 : 2
27 : 9
300 : 100
384 : 128 u. s. f.

§. 35. Man hat also in jeder Proportion zwey Dividende und zwey Divisoren, welche beyderseits den nämlichen Quotienten geben. Wenn man daher das erste Dividend mit dem zweyten Divisor multiplicirt, muß eben so viel herauskommen, als wenn man das zweyte Dividend mit dem ersten Divisor multiplicirt. Wenn man nämlich das erste Dividend mit dem zweyten Divisor multiplicirt, so multiplicirt man eigentlich den ersten Divisor, den zweyten Divisor, und den gemeinschaftlichen Quotienten miteinander; und wenn man das zweyte Dividend mit dem ersten Divisor multiplicirt, multiplicirt man ebenfalls eigentlich die beyden Divisoren und den gemeinschaftlichen Quotienten miteinander, weil immer ein Dividend das Product aus dem Divisor und dem Quotienten ist. Da nun in beyden Producten die beyden Divisoren und der gemeinschaftliche Quotient vorkommen, so sind sie nothwendiger Weise gleich.

Sind nun das erste und dritte Glied der Proportion Dividende, so sind das zweyte und vierte Divisoren; wenn aber das erste und dritte Divisoren sind, so sind das zweyte und vierte Dividende. Man erhält also folgenden Lehrsatz, welcher die Haupteigenschaft der Proportionen ausdrückt: „Das Product aus dem ersten und vierten Gliede ist in jeder Proportion dem Producte aus dem zweyten und dritten gleich.“ Oder: „Das Product aus den äußern Gliedern ist dem Product aus den mittlern gleich.“

Aus der Proportion im vorigen Paragraph, nämlich:

$$15 : 5 = 21 : 7$$

erhält man also 15mal 7, und 5mal 21, welche beyde 105 machen.

§. 36. Aus der eben gefundenen Eigenschaft folget, daß sich in jeder Proportion eine von den vier Zahlen finden lasse, wenn sie unbekannt ist, und die anderen drey gegeben sind; denn gesetzt, man wüßte in der Proportion

$$15 : 5 = 21 : 7$$

die vierte Zahl nicht, sondern es sey bloß gesagt, 15 verhält sich zu 5, wie sich 21 zu irgend einer vierten Zahl verhält, die man sucht. Man kann also an den Platz der noch unbekannten vierten Zahl irgend ein willkührliches Zeichen, etwa einen Buchstaben, schreiben. Dann hat man

$$15 : 5 = 21 : x.$$

Nun weis man aber, daß das Product der äußern Glieder so groß seyn muß, als das Product der mittlern. Das Product der mittlern Glieder macht hier 105; und folglich muß die 15fache noch unbekannte Zahl ebenfalls 105 ausmachen. Man sucht aber nicht die 15fache vierte Zahl, sondern nur die einfache. Dividirt man also 105 mit 15, so ist der Quotient 7 die gesuchte vierte Zahl. Setzt man

nun diese an den Platz des willkührlich angenommenen Zeichens, so ist die Proportion vollständig.

Zur Bequemlichkeit solcher Ansätze macht man noch von folgenden Zeichen Gebrauch:

1) Um anzuzeigen, daß zwey Zahlen mit einander multiplicirt werden sollen, schreibt man zwischen sie das Zeichen ×, oder auch nur einen Punkt. So z. B. heißt 17 × 36 so viel als 17mal 36.

2) Um anzuzeigen, daß zwey Zahlen mit einander dividirt werden sollen, schreibt man sie wie einen Bruch, so daß das Dividend als Zähler und der Divisor als Nenner erscheint.

3) Um anzuzeigen, daß zwey Zahlen einander gleich sind, schreibt man zwischen sie das Zeichen =. So z. B. heißt

$$5 \times 28 = 140$$

so viel als: 5mal 28 ist gleich 140.

Wenn nun die Proportion gegeben ist:

$$17 : 153 = 7 : x$$

so muß das Product der äußern Glieder so groß seyn als das Product der mittlern. Man hat also

$$17 \times x = 7 \times 153.$$

Da man aber nicht die 17fache unbekannte Zahl sucht, sondern die einfache, so muß man mit 17 dividiren, und dann ist

$$x = \frac{7 \times 153}{17} = 7 \times 9 = 63$$

und also ist die vollständige Proportion

$$17 : 153 = 7 : 63.$$

Hier ist das erste Glied 9mal im zweyten enthalten, und

eben so oft das dritte im vierten. Die Producte der äußern und mittlern Glieder aber geben:

$$17 \times 63 = 153 \times 7 = 1071.$$

Aus dem bisher entwickelten Verfahren ergiebt sich noch die Regel: Wenn in einer Proportion das vierte Glied unbekannt ist, so findet man es, wenn man die mittleren Glieder multiplicirt, und dieses Product mit dem ersten Gliede dividirt.

§. 37. Es ist aber nicht nothwendig, daß gerade nur immer das vierte Glied unbekannt sey, sondern es kann von den vier Zahlen, welche zu einer Proportion erfordert werden, überhaupt eine mangeln. Man erhält dadurch noch folgende drey Fälle:

1) Es kann das erste Glied unbekannt seyn. Es sey z. B. gegeben:

$$x : 105 = 7 : 15.$$

Man erhält also die gleichen Producte

$$x \times 15 = 7 \times 105.$$

Weil man aber nur ein x sucht, und nicht fünfzehn, so ist

$$x = \frac{7 \times 105}{15} = 7 \times 7 = 49$$

und man hat also

$$49 : 105 = 7 : 15.$$

2) Es kann das zweyte Glied mangeln. Es sey als Beyspiel gegeben:

$$135 : x = 9 : 17.$$

Man erhält zuerst

$$135 \times 17 = x \times 9$$

und also

$$x = \frac{135 \times 17}{9} = 15 \times 17 = 255.$$

Folglich hat man die vollständige Proportion

$$135 : 255 = 9 : 17.$$

3) Es kann das dritte Glied unbekannt seyn. Es sey als Beyspiel gegeben:

$$11 : 132 = x : 96.$$

Nun ist zuerst

$$132 \times x = 11 \times 96$$

und

$$x = \frac{11 \times 96}{132} = \frac{96}{12} = 8.$$

Man hat also die Proportion

$$11 : 132 = 8 : 96.$$

Wenn also überhaupt in einer Proportion ein Glied unbekannt ist, so ist dieses entweder eines der beyden äussern, oder eines der beyden mittlern, und man erhält nun folgende zwey Regeln:

I. Wenn in einer Proportion eines der beyden äußern Glieder unbekannt ist, so wird es gefunden, wenn man das Product der mittlern Glieder mit dem bekannten äußern Gliede dividirt.

II. Wenn in einer Proportion eines der beyden mittlern Glieder unbekannt ist, so wird es gefunden, wenn man das Product der äußern Glieder mit dem bekannten mittlern dividirt.

Dieses nennt man auch gewöhnlich, eine Proportion auflösen, und man versteht darunter immer, den Werth eines der vier Glieder bestimmen, welches beym ersten Ansatze noch unbekannt war.

§. 38. Da eine Proportion nothwendig immer wahr bleibt, so lange sie für ein unbekanntes Glied den nämlichen Werth giebt, und so lange die Producte aus den

äußern und aus den mittlern Gliedern unverändert und gleich bleiben, so ergeben sich noch folgende Eigenschaften:

1) In jeder Proportion lassen sich die beyden Verhältnisse umkehren. Wenn z. B. gegeben ist

$$2 : 3 = 6 : 9$$

so hat man auch

$$3 : 2 = 9 : 6$$

denn in beyden Ansätzen wird das Product der äußern oder mittlern Glieder 18, und wenn eine von den vier Zahlen als unbekannt angenommen wird, so erhält sie aus beyden Ansätzen denselben Werth.

2) In jeder Proportion lassen sich die mittlern Glieder verwechseln. Wenn gegeben ist

$$2 : 3 = 6 : 9$$

so ist auch

$$2 : 6 = 3 : 9.$$

3) In jeder Proportion lassen sich die äußern Glieder verwechseln. Es sey wieder gegeben

$$2 : 6 = 3 : 9$$

so ist auch

$$9 : 6 = 3 : 2.$$

4) Es läßt sich also auch jede Proportion ganz umgekehrt anschreiben, denn dieses ist nichts anders, als daß man zuerst die mittlern Glieder verwechselt, und dann auch noch die äußern. Wenn gegeben ist

$$2 : 3 = 6 : 9$$

so hat man auch

$$9 : 6 = 3 : 2.$$

Verwechselt man zuerst die mittlern Glieder, so hat man

$$2 : 6 = 3 : 9$$

und wenn man nun auch die äußern verwechselt, so wird

$$9 : 6 = 3 : 2.$$

5) Es

5) Es läßt sich also jede Proportion mit den nämlichen Zahlen auf acht verschiedene Weisen anschreiben. Das bisher gebrauchte Beyspiel giebt:

$$2 : 3 = 6 : 9$$
$$2 : 6 = 3 : 9$$
$$3 : 2 = 9 : 6$$
$$6 : 2 = 9 : 3$$
$$3 : 9 = 2 : 6$$
$$6 : 9 = 2 : 3$$
$$9 : 3 = 6 : 2$$
$$9 : 6 = 3 : 2.$$

6) Wenn also eine von den vier Zahlen einer Proportion unbekannt ist, so ist es willkührlich, an welchem Platze man sie lassen will, und auch dann noch, wenn man sich für einen von den vier Plätzen entschieden hat, bleibt eine Wahl zwischen zweyerley Ansätzen.

§. 39. Da man an jeder Proportion überhaupt alle Veränderungen vornehmen darf, durch welche sie nicht aufhört eine Proportion zu seyn, so folgt:

1) In jeder Proportion darf man ein Verhältniß mit irgend einer Zahl multipliciren oder dividiren; denn auf diese Art erhält man wieder gleiche Producte aus den äussern und aus den mittlern Gliedern. Es sey z. B. gegeben

$$6 : 9 = 14 : 21$$

so kann man das erste Verhältniß mit 3 dividiren, oder das zweyte mit 7. Im ersten Falle erhält man

$$2 : 3 = 14 : 21$$

und im zweyten Falle

$$6 : 9 = 2 : 3.$$

Wäre hier gegeben gewesen

$$6 : 9 = 14 : x$$

so erhält man, wenn man das erste Verhältniß mit 3 dividirt,

$$2 : 3 = 14 : x$$

und folglich ist

$$x = \frac{3 \times 14}{2} = 3 \times 7 = 21.$$

2) Da man die mittlern Glieder vertauschen darf, und eben so die äußern, so darf man auch das erste und dritte Glied, oder das zweyte und vierte mit irgend einer Zahl multipliciren oder dividiren. Es sey z. B. gegeben

$$3 : 5 = 18 : x$$

so ist auch, wenn man das erste und dritte Glied mit 3 dividirt,

$$1 : 5 = 6 : x$$

und also

$$x = 5 \times 6 = 30.$$

3) Man darf in jeder Proportion das erste Verhältniß mit irgend einer Zahl multipliciren oder dividiren, und das zweyte Verhältniß mit einer andern. Wenn z. B. gegeben ist

$$\tfrac{2}{3} : 5 = \tfrac{1}{2} : x$$

so bleibt die Proportion wahr, wenn man das erste Verhältniß mit 3, und das zweyte mit 2 multiplicirt. Dadurch erhält man

$$2 : 15 = 1 : 2x.$$

Es ist folglich

$$2x = \tfrac{15}{2}$$

und

$$x = \tfrac{15}{4} = 3\tfrac{3}{4}.$$

4) Man darf also auch das erste und dritte Glied mit irgend einer Zahl multipliciren oder dividiren, und das zweyte und vierte mit einer andern. Es sey gegeben

$$2 : 7 = 8 : 28$$

so kann man das erste und dritte Glied etwa mit 3 multipliciren, und das zweyte und vierte mit 7 dividiren. Dadurch erhält man die Proportion

$$6 : 1 = 24 : 4.$$

5) Wenn ein Verhältniß durch Brüche ausgedrückt ist, so läßt es sich durch ganze Zahlen ausdrücken, wenn man das gegebene Verhältniß mit dem gemeinschaftlichen Nenner der beyden Brüche multiplicirt. Es sey z. B. gegeben

$$\tfrac{5}{6} : \tfrac{3}{4} = \tfrac{2}{7} : x.$$

Der gemeinschaftliche Nenner der beyden Brüche des ersten Verhältnisses ist 12. Multiplicirt man also dieses erste Verhältniß mit 12, so erhält man

$$10 : 9 = \tfrac{2}{7} : x.$$

Nun kann man das erste und dritte Glied mit $\tfrac{7}{2}$ multipliciren, wodurch man erhält

$$35 : 9 = 1 : x$$

und folglich ist

$$x = \tfrac{9}{35}.$$

6) Es läßt sich also auch umgekehrt in jeder Proportion, in welcher ganze Zahlen stehen, ein Verhältniß durch Brüche ausdrücken, wenn man dieses Verhältniß mit dem kleinsten gemeinschaftlichen Dividuus der beyden ganzen Zahlen dividirt. Wenn z. B. gegeben ist

$$8 : 12 = 72 : 108$$

so ist für die Zahlen 8 und 12 der kleinste Dividuus 24.

Dividirt man also das erste Verhältniß mit 24, so erhält man

$$\frac{1}{3} : \frac{1}{2} = 72 : 108.$$

§. 40. Aus jeder Proportion lassen sich unzählig viele andere bilden, deren Wahrheit von der Wahrheit der ersten abhängt. Dieses beruht auf folgenden Sätzen:

1) In jeder Proportion verhält sich die Summe der ersten zwey Glieder, oder ihr Unterschied, zum ersten oder zweyten Glied, wie sich die Summe der letzten zwey Glieder, oder ihr Unterschied, zum dritten oder vierten Gliede verhält. Es sey gegeben

$$3 : 7 = 6 : 14$$

so lassen sich aus dieser Proportion durch den oben ausgesprochenen Satz noch folgende vier bilden:

$$10 : 3 = 20 : 6$$
$$10 : 7 = 20 : 14$$
$$4 : 3 = 8 : 6$$
$$4 : 7 = 8 : 14.$$

Da man nun aus jeder dieser vier Proportionen auf die nämliche Weise wieder vier andere bilden könnte, und aus diesen wieder andere, und so immer fort, so ist klar, daß sich aus einer einzigen Proportion nach Belieben viele, und eigentlich unendlich viele ableiten lassen.

2) Es verhält sich die Summe der ersten Glieder zu ihrem Unterschied, wie sich die Summe der letzten zwey Glieder zu ihrem Unterschiede verhält.

Wenn gegeben ist

$$5 : 8 = 15 : 24$$

so hat man auch

$$13 : 3 = 39 : 9.$$

3) Wenn zwey Proportionen gegeben sind, so darf man sie Glied für Glied miteinander multipliciren, und es bilden die Producte ebenfalls wieder eine Proportion. Es sey gegeben

$$3 : 7 = 15 : 35$$
$$2 : 9 = 6 : 27$$

so erhält man durch Multiplication

$$6 : 63 = 90 : 945.$$

Wenn mehr als zwey Proportionen gegeben sind, so kann man zuerst zwey miteinander multipliciren, und da das Resultat wieder eine Proportion ist, so kann man diese mit der dritten multipliciren, und so überhaupt fortfahren. Wenn also überhaupt mehrere Proportionen gegeben sind, so verhält sich das Product der ersten Glieder zum Producte der zweyten, wie sich das Product der dritten Glieder zum Producte der vierten verhält.

4) Eben so darf man, wenn zwey Proportionen gegeben sind, die Glieder der einen durch die entsprechenden Glieder der andern dividiren, und es bilden die Quotienten wieder eine Proportion. Es sey gegeben

$$21 : 99 = 315 : 1485$$
$$3 : 11 = 15 : 55.$$

Dividirt man nun die Glieder der ersten durch die der zweyten, so erhält man

$$7 : 9 = 21 : 27$$

was offenbar wieder eine Proportion ist; denn es ist

$$7 \times 27 = 9 \times 21 = 189.$$

§. 41. Wenn zwey Proportionen gegeben sind, welche eine Zahl gemein haben, so lassen sie sich jedesmal so ordnen, daß die gemeinschaftliche Zahl in der ersten Proportion

am vierten, und in der zweyten am dritten Platze steht. Es sey z. B. gegeben

$$5 : 7 = 15 : 21$$
$$8 : 15 = 32 : 60.$$

Diese beyden Proportionen haben die Zahl 15 gemein, und man kann sie auf folgende Weise ordnen:

$$7 : 5 = 21 : 15$$
$$8 : 32 = 15 : 60.$$

Multiplicirt man nun beyde Proportionen miteinander, so läßt sich das zweyte Verhältniß mit der gemeinschaftlichen Zahl dividiren. Man erhält nämlich

$$56 : 160 = 21 : 60.$$

Es verhält sich also das Product aus den ersten Gliedern zum Product aus den zweyten, wie das dritte Glied der ersten Proportion zum vierten Gliede der zweyten. Wenn also zwey Proportionen so von einander abhängen, daß in der ersten eine Zahl unbekannt ist, welche in der zweyten als bekannt vorausgesetzt wird, um eine zweyte unbekannte Zahl finden zu können, so ist nicht nöthig, die beyden Proportionen nach einander einzeln aufzulösen, sondern man kann sie auf die eben erklärte Art mit einander verbinden, wodurch man die zweyte unbekannte Zahl findet, ohne die erste, oder die gemeinschaftliche kennen zu müssen. Es sey z. B. gegeben

$$5 : 8 = 7 : x$$
$$3 : 11 = x : y$$

so erhält man

$$15 : 88 = 7 : y$$

und folglich ist

$$y = \frac{7 \times 88}{15} = \frac{616}{15} = 41 \frac{1}{15}.$$

Will man beyde Proportionen nach einander auflösen, so erhält man aus der ersten

$$x = \frac{56}{5}.$$

Nun wird die zweyte

$$3 : 11 = \frac{56}{5} : y$$

und folglich wird wie zuvor

$$y = \frac{11 \times 56}{15} = \frac{616}{15} = 41\frac{1}{15}.$$

Uebrigens ist für sich klar, daß die zweyte unbekannte Zahl nicht nothwendig am vierten Platze in der zweyten Proportion stehen müsse; denn die oben ausgesprochene Regel bedingt nur, daß die gemeinschaftliche Zahl in der ersten Proportion am vierten Platze und in der zweyten am dritten stehe.

Wenn nun mehrere Proportionen so beschaffen sind, daß sie paarweise immer eine Zahl gemein haben, so lassen sie sich auch paarweise gerade so behandeln, wie eben erklärt wurde. Dadurch aber bringt man alle auf einmal in Ansatz. Multiplicirt man dann alle miteinander, so läßt sich das zweyte Verhältniß mit dem Product aus allen gemeinschaftlichen Zahlen dividiren, und es verhält sich das Product aus allen ersten Gliedern, zum Producte aus allen zweyten, wie das dritte Glied der ersten Proportion zum vierten Gliede der letzten.

Beyspiel.

$$\begin{array}{l} 2 : 3 = 1 : k \\ 5 : 4 = k : x \\ 8 : 3 = x : y \\ 5 : 9 = y : z \\ \hline 400 : 324 = 1 : z \end{array}$$

oder

$$100 : 81 = 1 : x$$

und also ist

$$x = \frac{81}{100}.$$

§. 42. Diejenige Proportion, welche nur eine einzige unbekannte Zahl enthält, wird bey dieser Aufgabe als erste angesehen, und es ist jedesmal möglich, die unbekannte Zahl an den vierten Platz zu bringen. Alle übrigen Proportionen enthalten aber zwey unbekannte Zahlen, und die im vorigen Paragraph ausgesprochene Regel läßt sich immer buchstäblich anwenden, wenn eine von beyden unbekannten Zahlen ein äußeres, und die andere ein mittleres Glied ist. Wenn aber die beyden unbekannten Zahlen zugleich die beyden äußern oder die beyden mittlern Glieder sind, dann wird noch eine besondere Vorbereitung erfordert. Es sey gegeben

$$2 : 5 = 7 : x$$
$$x : 3 = 8 : y.$$

Da hier nur zwey Proportionen gegeben sind, und es gleichgültig ist, an welchem Platze die nicht gemeinschaftliche unbekannte Zahl steht, so erhält man

$$2 : 5 = 7 : x$$
$$8 : y = x : 3$$

und folglich ist

$$16 : 5 \times y = 7 : 3.$$

Dividirt man nun das erste Verhältniß mit 5, so erhält man

$$\frac{16}{5} : y = 7 : 3$$

und folglich ist

$$y = \frac{16 \times 3}{5 \times 7} = \frac{48}{35} = 1\frac{13}{35}.$$

Will man aber hier bey der ausgesprochenen Regel bleiben, daß die nicht gemeinschaftliche unbekannte Zahl am vierten Platze stehen soll, so muß man in der zweyten Proportion das zweyte und vierte Glied mit y dividiren. Dann erhält man

$$2 : 5 = 7 : x$$

$$8 : 1 = x : \frac{3}{y}$$

$$16 : 5 = 7 : \frac{3}{y}$$

und $$\frac{48}{y} = 35.$$

Da aber 35 so viel ist, als $\frac{35}{1}$, so hat man auch

$$\frac{48}{y} = \frac{35}{1}.$$

Man hat also zwey gleiche Quotienten, und folglich die Proportion

$$48 : y = 35 : 1$$

und

$$y = \frac{48}{35} = 1\frac{13}{35}.$$

Nun seyen folgende drey Proportionen gegeben:

$$2 : 3 = 7 : x$$
$$x : 5 = 4 : y$$
$$y : 2 = 6 : z.$$

Da hier nur z gesucht werden soll, so muß man bloß so zu ordnen trachten, daß x und y durch Division hinweg gebracht werden können. Setzt man also

$$2 : 3 = 7 : x$$
$$4 : y = x : 5$$
$$y : 2 = 6 : z$$

und multiplicirt nun alle drey Proportionen miteinander, so erhält man:

$$8y : 6y = 42x : 5xz.$$

Nun läßt sich das erste Verhältniß mit 2y, und das zweyte mit x dividiren, und man erhält:

$$4 : 3 = 42 : 5z$$

und folglich wird

$$z = \frac{3 \times 42}{4 \times 5} = \frac{3 \times 21}{2 \times 5} = \frac{63}{10} = 6\frac{3}{10}.$$

Will man aber die unbekannten Zahlen immer nur am dritten und vierten Platze haben, so muß man das zweyte und vierte Glied der zweyten Proportion mit 5y, und das erste und dritte Glied der letzten Proportion mit 6y dividiren. Dadurch erhält man

$$2 : 3 = 7 : x$$

$$4 : \frac{1}{5} = x : \frac{1}{y}$$

$$\frac{1}{6} : 2 = \frac{1}{y} : z$$

$$\frac{8}{6} : \frac{6}{5} = 7 : z$$

oder

$$\frac{4}{3} : \frac{6}{5} = 7 : z$$

oder

$$\frac{2}{3} : \frac{3}{5} = 7 : z$$

oder

$$10 : 9 = 7 : z$$

und also

$$z = \frac{63}{10} = 6\frac{3}{10}.$$

Offenbar hängen diese beyden Verfahrungsweisen nicht von der Menge der gegebenen Proportionen ab. Man erhält also folgende Regeln; nämlich:

1) Man ordnet alle gegebenen Proportionen so, daß die jedem Paare gemeinschaftliche unbekannte Zahl immer

in der vorausgehenden Proportion am zweyten oder vierten Platze steht, und in der nachfolgenden am ersten oder dritten. Dann läßt sich jedes Verhältniß derjenigen Proportion, welche aus der Multiplication aller entsteht, mit dem Product aus mehrern gemeinschaftlichen unbekannten Zahlen dividiren, und es bleibt nur die nicht gemeinschaftliche an irgend einem Platze stehen. Es sey z. B. gegeben

$$2 : x = 3 : 5$$
$$3 : x = y : 4$$
$$y : 6 = 5 : z$$
$$z : 2 = 5 : w$$

so kann man auf folgende Weise ordnen

$$2 : x = 3 : 5$$
$$x : 3 = 4 : y$$
$$5 : z = y : 6$$
$$z : 2 = 5 : w$$

$$10xz : 6xz = 60y : 30yw.$$

Nun läßt sich das erste Verhältniß mit $2xz$, und das zweyte mit $30y$ dividiren, und man erhält

$$5 : 3 = 2 : w$$

und also

$$w = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}.$$

2) Man setzt die unbekannte Zahl der ersten Proportion an den vierten Platz, und ordnet die zweyte so, daß die nämliche unbekannte Zahl am dritten Platze steht. Wenn dieses geschehen ist, befindet sich die zweyte unbekannte Zahl entweder am vierten Platz, oder kann durch bloße Vertauschung der äußern Glieder dahin gebracht werden; oder sie befindet sich am zweyten. Ist dieses der Fall, so dividirt man das zweyte und vierte Glied mit dem Producte aus dem zweyten und vierten. Wenn z. B. vorkömmt:

$$2 : y = x : 3$$

so dividirt man das zweyte und vierte Glied mit 3y, und erhält

$$2 : \frac{1}{3} = x : \frac{1}{y}.$$

Nun muß in der nachfolgenden Proportion der Bruch am dritten Platze stehen, der in der eben angesetzten Proportion am vierten steht. Gesetzt es sey die folgende Proportion

$$5 : y = z : 6$$

so kann man das erste Verhältniß mit 5y dividiren, und erhält

$$\frac{1}{y} : \frac{1}{5} = z : 6$$

oder

$$6 : \frac{1}{5} = z : \frac{1}{y}$$

und also auch

$$\frac{1}{5} : 6 = \frac{1}{y} : z.$$

Es seyen nun noch folgende zwey Beyspiele gegeben:

$$\begin{array}{l} 2 : x = 3 : 7 \\ 7 : x = y : 3 \\ 9 : z = y : 5 \\ w : z = 5 : 6 \end{array}$$

so erhält man nach der ersten Regel

$$\begin{array}{l} 2 : x = 3 : 7 \\ x : 7 = 3 : y \\ 9 : z = y : 5 \\ z : w = 6 : 5 \\ \hline 18 : 7w = 54 : 175 \\ 3 : 7w = 9 : 175 \\ 1 : 7w = 3 : 175 \\ 1 : w = 3 : 25. \end{array}$$

Folglich ist

$$w = \frac{25}{3} = 8\frac{1}{3}.$$

Nach der zweyten Regel aber erhält man:

$$\begin{array}{ccccccc} 3 & : & 7 & = & 2 & : & x \\ 7 & : & \frac{1}{3} & = & x & : & \frac{1}{y} \\ \frac{1}{9} & : & 5 & = & \frac{1}{y} & : & z \\ 6 & : & 5 & = & z & : & w \\ \hline 14 & : & \frac{175}{3} & = & 2 & : & w \\ 7 & : & \frac{175}{3} & = & 1 & : & w \\ 1 & : & \frac{25}{3} & = & 1 & : & w \end{array}$$

und also

$$w = \frac{25}{3} = 8\frac{1}{3}.$$

Als zweytes Beyspiel sey gegeben:

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & : & x & = & 3 & : & 5 \\ y & : & 8 & = & 3 & : & x \\ y & : & z & = & 9 & : & 2 \\ z & : & 5 & = & 2 & : & w \\ w & : & k & = & 8 & : & 9 \\ k & : & 4 & = & 1 & : & f. \end{array}$$

Nun erhält man nach der ersten Regel

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & : & x & = & 3 & : & 5 \\ x & : & 3 & = & 8 & : & y \\ 9 & : & 2 & = & y & : & z \\ 2 & : & w & = & z & : & 5 \\ w & : & k & = & 8 & : & 9 \\ k & : & 4 & = & 1 & : & f \\ \hline 3 & : & 2 & = & 64 & : & 75f \end{array}$$

und also ist

$$f = \frac{2 \times 64}{3 \times 75} = \frac{128}{225}.$$

Nach der zweyten Regel aber erhält man:

$$3 : 5 = 2 : x$$
$$8 : \frac{1}{3} = x : \frac{1}{y}$$
$$2 : 9 = \frac{1}{y} : \frac{1}{z}$$
$$\frac{1}{2} : 5 = \frac{1}{z} : w$$
$$8 : 9 = w : k$$
$$1 : \frac{1}{4} = k : \frac{1}{f}$$

$$32 : \frac{225}{4} = 1 : \frac{1}{f}$$

oder

$$128 : 225 = 1 : \frac{1}{f}$$

oder

$$128 : 225 = f : 1$$

und also

$$f = \frac{128}{225}.$$

Anwendung: Regel Detri, Reesische Regel, Kettenregel.

---

§. 43. Da es in jeder Proportion, in welcher eine von den vier Zahlen unbekannt ist, willkührlich bleibt, an welcher Stelle man sie anzeigen will, so ist man in der Anwendung und Ausübung allgemein dahin übereingekommen, die unbekannte Zahl jedesmal an den vierten Platz zu setzen; und da dieses bey jeder Rechnung beobachtet

wird, so ist es auch nicht nöthig, die bisher gebrauchte Bezeichnung anzuwenden. Man bezeichnet daher die vierte, oder gesuchte Zahl gar nicht, sondern man hat bloß drey Zahlen, und weis, daß immer die vierte gesucht wird. Anstatt z. B. anzusetzen

$$3 : 5 = 9 : x$$

schreibt man bloß

$$3 \quad 5 \quad 9$$

In dieser Form, und besonders wenn von benannten Zahlen die Rede ist, nennt man den ganzen Satz eine Regel Detri.

Wenn irgend eine Arbeit ein gewisses Geld kostet, so muß die doppelte Arbeit doppelt so viel Geld, und die dreyfache Arbeit dreymal so viel Geld kosten, u. s. w. Man kann sich also hier auf zweyerley Art ein Verhältniß denken; nämlich 1) die geleistete Arbeit steht im Verhältniß mit der Zahlung, denn wenn die Arbeit größer wird, wird auch die Zahlung größer, und wenn jene kleiner wird, wird auch diese kleiner; und 2) verschiedene Quantitäten der Arbeit stehen im nämlichen Verhältniß, in welchem die Quantitäten der dafür gereichten Zahlungen stehen. Wenn ferner irgend eine Quantität von einer Waare zu irgend einem Preise verkauft wird, so wird die doppelte Quantität Waare auch zum doppelten Preise, und die dreyfache Quantität Waare auch zum dreyfachen Preise verkauft werden. Es steht also wieder 1) die Menge der Waare mit dem Preise im Verhältniß, weil beyde zu gleicher Zeit das doppelte, dreyfache, und überhaupt ein gleichvielfaches werden; und 2) stehen die Mengen von Waare unter sich in dem nämlichen Verhältniß, in welchem die entsprechenden Preise stehen. Gesetzt es sollen 3 Pfund von irgend einer Waare um 5 fl. verkauft werden, was kosten nun 9 Pfund? Da hier um den Preis der dreyfachen Quantität Waare ge-

fragt ist, so muß auch der dreyfache Preis entrichtet werden, also 15 fl. Man hat also die Proportion

$$3 \text{ ℔.} : 9 \text{ ℔.} = 5 \text{ fl.} : 15 \text{ fl.}$$

Da man aber in jeder Proportion die mittleren Glieder vertauschen darf, so ist auch folgender Ansatz richtig:

$$3 \text{ ℔.} : 5 \text{ fl.} = 9 \text{ ℔.} : 15 \text{ fl.}$$

Der erste Ansatz drückt aus, daß sich die Quantitäten der Waare unter einander verhalten, wie sich die entsprechenden Preise untereinander verhalten. Der zweyte Ansatz aber drückt aus, daß irgend eine Quantität Waare sich zu ihrem Preise gerade so verhält, wie eine andere Quantität Waare zu ihrem Preise. In der Anwendung wird nun allgemein nur der zweyte Ansatz gebraucht, und anstatt zu schreiben

$$3 \text{ ℔.} : 5 \text{ fl.} = 9 \text{ ℔.} : x \text{ fl.}$$

schreibt man bloß

$$3 \text{ ℔.} \quad 5 \text{ fl.} \quad 9 \text{ ℔.}$$

Die Regel Detri hat also folgende Eigenschaften: 1) Sie ist eine Proportion, in welcher die vierte Zahl unbekannt ist, und die man daher gar nicht bezeichnet. 2) Die erste und die dritte Zahl hat einerley Benennung, und eben so hat die zweyte und die gesuchte einerley Benennung. 3) Eine Regel Detri wird aufgelöst, wenn man die zweyte und dritte Zahl mit einander multiplicirt, und dieses Product mit der ersten Zahl dividirt.

Hier muß aber noch folgendes bemerkt werden. In der oben stehenden Proportion ist

$$x = \frac{5 \times 9}{3} = 15$$

Man darf sich aber nicht vorstellen

$$x \text{ fl.} = \frac{5 \text{ fl.} \times 9 \text{ ℔.}}{3 \text{ ℔.}}$$

denn

denn man kann wohl die Zahl 5 mit der Zahl 9 multipliciren, es würde aber unbegreiflich bleiben, 5 Gulden mit 9 Pfunden zu multipliciren. Verhältnisse können nur durch Zahlen ausgedrückt werden, nicht aber durch Dinge. Die Rechnung führt bloß auf eine Zahl, und man muß aus den Umständen der Aufgabe wissen, von welcher Benennung die Einheit dieser Zahl ist. In dem angesetzten Beyspiele verhalten sich die Quantitäten der Waare wie die Zahlen 3 und 9, und die Preise verhalten sich wie die Zahlen 5 und 15. Man weis also aus den Bedingungen der Aufgabe, daß das gesuchte Glied der Proportion Gulden bedeutet.

§. 44. Da in jeder Proportion, in welcher das vierte Glied unbekannt ist, die zwey mittleren multiplicirt, und mit dem ersten dividirt werden müssen, so kann man auch den Ansatz so machen, daß die Zahlen, welche multiplicirt werden müssen, schon unter einander stehen. Man schreibt deswegen das zweyte Verhältniß, in welchem die unbekannte Zahl vorkömmt, verkehrt an, und setzt das erste Verhältniß in gerader Ordnung darunter. Wenn also die Proportion vorkömmt

3 ℔. : 5 fl. = 9 ℔. : x fl.

so kann man schreiben

x fl. 9 ℔.
3 ℔. 5 fl.

Man pflegt bey dieser Art des Ansatzes, um mehr Deutlichkeit in der Handschrift zu erhalten, die Glieder der Verhältnisse durch einen stehenden Strich zu trennen. Der vollständige Ansatz ist also

x fl.	9 ℔.
3 ℔.	5 fl.

Ein solcher Ansatz heißt eine Reesische Regel, und ihre Eigenschaften sind folgende: 1) Es werden alle vier Glieder

der Proportion angeschrieben, und man beginnet mit der unbekannten Zahl, und ihrer Benennung. 2) Man kann daher auch sagen, in der Proportion als reesische Regel angeschrieben, sey das erste Glied unbekannt. 3) Das Zeichen der unbekannten Zahl wird links vom Striche, und die bekannte Zahl, mit welcher sie im Verhältnisse steht, rechts vom Striche geschrieben. 4) Das zweyte Verhältniß, welches aus gegebenen Zahlen besteht, wird in umgekehrter Ordnung angeschrieben, so daß zu beyden Seiten des Striches gleiche Benennungen vorkommen. 5) Die Auflösung geschieht dann dadurch, daß man die Zahlen rechts vom Striche miteinander multiplicirt, und dieses Product mit der Zahl, welche auf der linken Seite steht, dividirt. 6) Die Benennung der gesuchten Zahl ist hier ausgesprochen, und da in jeder Proportion das Product aus den äußern Gliedern dem Product aus den mittlern gleich ist, so muß bey dem reesischen Ansatz das Product der Zahlen, welche rechts vom Striche stehen, dem Producte der Zahlen, welche links vom Striche stehen, gleich seyn.

Z. B. wie viele Kreuzer kosten 47 Pfund, wenn 7 Pfund 13 kr. kosten. Hier wird die Operation folgende:

kr.	x	47 ℔.
℔.	7	13 kr.

141		
47		
611	87	1 fl. 27 $\frac{2}{7}$ kr.
7	60	
56	27	
51		
49		
2		
7.		

§. 45. Da man in jeder Proportion das erste und dritte Glied, oder das erste und zweyte mit irgend einer Zahl multipliciren oder dividiren darf, so folgt:

1) Wenn in einer Regel Detri die erste und dritte Zahl, oder die erste und zweyte einen gemeinschaftlichen Divisor haben, so darf man mit diesem wirklich dividiren, und die gegebenen Zahlen verkleinern.

2) Wenn in einer reesischen Regel Zahlen rechts und links vom Striche gemeinschaftliche Divisoren haben, so darf man mit diesen wirklich dividiren, und die gegebenen Zahlen verkleinern.

3) Wenn in einer Regel Detri das zweyte oder dritte Glied, oder beyde Brüche sind, so darf man ihre Nenner ausstreichen, und mit denselben das erste Glied multipliciren. Ist aber das erste Glied ein Bruch, so darf man ebenfalls den Nenner ausstreichen, und mit demselben das zweyte oder dritte Glied multipliciren. Nach dieser Verrichtung sind nur mehr ganze Zahlen vorhanden.

4) Wenn in einer reesischen Regel Brüche stehen, so darf man nur ihre Nenner ausstreichen, und auf die andere Seite des Striches setzen. Dann sind lauter ganze Zahlen vorhanden, und man multiplicirt auf jeder Seite alle Zahlen miteinander, die sich dort befinden. Das Product auf der rechten Seite ist immer Dividend, und das Product auf der linken Seite ist Divisor.

Z. B. Was kosten $7\frac{5}{8}$ Pfund, wenn $\frac{5}{6}$ Pfund $\frac{4}{5}$ fl. kosten. Als Regel Detri erhält man

$\frac{5}{9}$ ℔. $\frac{4}{5}$ fl. $\frac{61}{8}$ ℔.

5	61 · 6 = 366
5 · 8 = 40	366 · 4 = 1464
40 · 5 = 200	1464 : 200 = $7\frac{8}{25}$ fl.
	1400
	$\frac{64}{200} = \frac{8}{25}$.

Als reesische Regel aber erhält man

fl. x	$\frac{61}{8}$ ℔.
℔. $\frac{5}{9}$	$\frac{4}{5}$ fl.
8	6
5	
40	24
200	244
	122
	1464 : 200 = $7\frac{8}{25}$ fl.
	1400
	$\frac{64}{200} = \frac{8}{25}$.

Es versteht sich übrigens von selbst, daß die einzelnen Glieder Zahlen von bloß einer Benennung seyn müssen. Wenn sie also bey der ersten Angabe Benennungen von verschiedenen Unterabtheilungen haben, so muß man sie erst auf eine einzige Benennung bringen, und zwar entweder auf die Benennung vom niedrigsten Werth, oder auf die Benennung vom höchsten. Bey dem ersten Verfahren behält man ganze Zahlen, welche aber oft durch ihre Größe unbequem werden; bey dem zweyten Verfahren hingegen hat man Brüche, welche nur dann, wenn keine Verkleinerung möglich ist, auf große Zahlen führen. Z. B. Was kosten 7 Pf. 4 Lth., wenn 3 Quintchen 48 kr. 2 pf. kosten? Die kleinste Gewichtseinheit ist hier das Quintchen,

und die kleinste Geldeinheit der Pfenning. Man kann also mit Quintchen und Pfenningen rechnen, um alle Brüche zu vermeiden, oder mit Pfunden und Gulden, um den großen Zahlen auszuweichen. Im ersten Falle muß man sich die Aufgabe so stellen: Wie viele Pfenninge kosten 912 Quintchen, wenn 3 Quintchen 194 pf. kosten?

```
    pf. x  | 912 Qt.
    Qt. 3  | 194 pf.
  ---------------------
         1 |
           | 304
           | 776
         5820
        -----
        58976 pf.
        4     | 14744 kr. | 245 fl. 44 kr.
                60
```

Rechnet man aber lieber mit Brüchen, so lautet die Aufgabe: Was kosten $7\frac{1}{8}$ ⅏. oder $\frac{57}{8}$ ⅏., wenn $\frac{3}{128}$ ⅏. $\frac{97}{120}$ fl. kosten? Die Rechnung wird nun folgende:

```
        fl. x  | 57
               | --  ⅏.
    ⅏.  3      |  8
       ---     | 97
       128     | ---  fl.
        8      | 120
       120     | 128
  ----------------------
         1 | 19
         1 | 16
        15 |  2
           -----
            38
            97
           -----
           266
          342
          -----
          3686   | 245 fl. 44 kr.
          15
          30
          -----
           68
           60
          -----
           86
           75
          -----
           11
           --  fl. = 44 kr.
           15
```

§. 46. Die vortheilhafteste Rechnungsweise entsteht aber aus der Zusammensetzung der Proportionen. Für diesen Zweck müssen die Zahlen von gemischten Benennungen zuerst auf einerley Benennung gebracht werden. Da nun in der Aufgabe des vorigen Paragraphs 7 ℔. 4 Loth vorkommen, so ist dieses so viel als 228 Loth, und 48 kr. 2 pf. machen 194 pf. Nun kann man folgende Proportionen ansetzen:

1 Lth.	:	4 Quint	=	228 Lth.	:	x Qt.
3 Qt.	:	194 pf.	=	x Qt.	:	y pf.
4 pf.	:	1 kr.	=	y pf.	:	z kr.
60 kr.	:	1 fl.	=	z kr.	:	w fl.
15	:	194	=	19	:	w

Folglich ist

$$w = \frac{194 \times 19}{15} = \frac{3686}{15} = 245\frac{11}{15} \text{ fl.}$$
$$= 245 \text{ fl. } 44 \text{ kr.}$$

In der Ausübung ist aber der reesische Ansatz der bequemste, weil bey diesem alle Zahlen, welche multiplicirt werden sollen, schon unter einander stehen, und Dividend und Divisor nebeneinander. Der reesische Ansatz entsteht aber aus dem Ansatz der Proportion dadurch, daß man das zweyte Verhältniß der letzten Proportion zuerst schreibt, und das erste umgekehrt darunter. Wo man nun hier aufhört, die letzte Proportion anzuschreiben, fängt man sogleich die vorletzte nach derselben Regel anzusetzen an, und fährt so fort, bis alle Proportionen angesetzt sind. Nach dieser Vorschrift erhält man:

fl.	w	z kr.
kr.	60	1 fl.
kr.	z	y pf.
pf.	4	1 kr.
Qt.	3	194 pf.
pf.	y	x Qt.
Qt.	x	228 Lth.
Lth.	1	4 Qt.

Da man aber auf diese Art immer vieles ganz vergebens anschreiben müßte, so läßt man alle jene Verhältnisse, welche durch zwey unbekannte Zahlen ausgedrückt sind, gänzlich weg. Auf diese Weise erhält man

fl. x	228 Lth.
Lth. 1	4 Qt.
Qt. 3	194 pf.
pf. 4	1 kr.
kr. 60	1 fl.

Da bey dem reesischen Ansatz durchaus nichts überflüssiges geschrieben wird, so ist er in der Ausübung der bequemste und zweckmäßigste. Man hat aber immer zuerst darauf zu sehen, welche Zahlen mit einander größer oder kleiner werden würden, wenn man die Aufgabe ändern würde; denn diese Zahlen stehen dann miteinander im Verhältniß. Der stehende Strich trennt die Glieder aller Verhältnisse, und diese Verhältnisse werden in abwechselnder Ordnung angesetzt, d. h. wenn das erste von der linken Seite gegen die rechte geschrieben wird, so schreibt man das zweyte von der rechten gegen die linke, das dritte wie das erste, das vierte wie das zweyte, u. s. f. Wenn auf diese Art der Ansatz fertig ist, stehen auf beyden Seiten des Striches gleiche Benennungen.

Z. B. Man kauft 25 Schäffel 5 Metzen um 23 Kronenthaler, was kostet 1 Dreyßiger? Hier wird der Ansatz

kr. x	1 Dreyßiger
Schäffel $\frac{155}{6}$	23 Kronenthaler
Metzen 6	1 Schäffel
Viertel 2	1 Metzen
Mäßl 4	1 Viertel
Dreyßiger 2	1 Mäßl
Kronenthaler 1	$\frac{27}{10}$ fl.
fl. 1	60 kr.
$155 \times 4 \times 2$	$23 \times 27 \times 3$
also	x kr. $= \frac{23 \times 27 \times 3}{155 \times 4 \times 2} = 1$ kr. $4\frac{3}{155}$ hl.

Wollte man den Ansatz in Proportionen machen, so müßte er folgender seyn:

1 Thlr.	:	$\frac{27}{10}$ fl.	=	23 Thlr.	:	m fl.
1 fl.	:	60 kr.	=	m fl.	:	n kr.
$\frac{155}{8}$ Schffl.	:	1 Schffl.	=	n kr.	:	p kr.
6 Mtz.	:	1 Mtz.	=	p kr.	:	q kr.
2 Vrtl.	:	1 Vrtl.	=	q kr.	:	x kr.
4 Mßl.	:	1 Mßl.	=	x kr.	:	y kr.
2 Drßgr.	:	1 Drßgr.	=	y kr.	:	z kr.
155×8	:	27×3	=	23	:	z

Da nun bey der Zusammensetzung der Proportionen das Product aus allen ersten Gliedern sich zum Product aus allen zweyten verhält, wie das dritte Glied der ersten Proportion zum vierten Gliede der letzten, so sieht man wohl, daß die reesische Regel in ihren Ansatz nur das aufnimmt, was die eben ausgesprochene Regel enthält, und folglich nichts, was nicht unmittelbar zur Rechnung nothwendig ist.

§. 47. Sehr oft steht eine Zahl mit mehrern andern zugleich im Verhältniß, d. h. sie wächst oder nimmt ab, wenn mehrere andere zugleich wachsen oder abnehmen. In diesem Falle steht also die einzelne Zahl im Verhältniß mit dem Producte der andern Zahlen. Es sey z. B. gegeben: Um einen Graben von 28′ Länge, 5′ Breite und 3′ Tiefe auszugraben, wurden 88 fl. bezahlt, was kostet unter den nämlichen Bedingungen ein Graben von 125′ Länge, 6′ Breite und 4′ Tiefe? Hier wird nicht für die Länge allein, oder die Breite, oder die Tiefe bezahlt, sondern eigentlich nur für die ausgegrabene Erde, d. h. für den Cubik-Inhalt des Grabens. Der Lohn wird also größer oder kleiner, je nachdem Länge, Breite und Tiefe des Grabens größer oder kleiner werden; er steht folglich im Verhältniß mit dem Producte dieser Angaben. Nun wird die Rechnung

fl. x	125′ L.
L. 28′	6′ Br.
Br. 5′	4′ T.
T. 3	88 fl.
7	25
	2
	50
	88
	4400 / 7

$\frac{4400}{7} = 628\frac{4}{7}$ fl. = 628 fl. 34 kr. 2 hl.

Es können aber auch zwey Zahlen in der besondern Beziehung zu einander stehen, daß eine abnimmt, wenn die andere wächst, und umgekehrt. In diesem Falle sagt man, die beyden Zahlen stehen zu einander in verkehrtem Verhältniß. Wenn z. B. aus irgend einer Quantität Wolle ein Stück Tuch von 60 Ellen Länge und 1 Elle Breite gemacht wird, wie lang wird ein Stück Tuch, das aus eben so viel Wolle, aber mit 2 Ellen Breite gemacht werden soll. Da das Tuch nochmal so breit werden soll, als das erste, so wird man bey der halben Länge schon alle Wolle verbraucht haben. So lange also die Quantität Wolle dieselbe bleibt, wird das daraus gewebte Tuch desto kürzer, je breiter es wird. Die Länge und die Breite stehen also in verkehrtem Verhältniß.

Da nun Brüche die Eigenschaft besitzen, daß sie, wenn ihr Zähler unverändert bleibt, desto kleinere Werthe haben, je größer ihre Nenner werden, so kann man auch Zahlen, welche in verkehrtem Verhältnisse stehen, als Nenner von Brüchen ansetzen, deren Zähler 1 ist. Diese Brüche dürfen dann in geradem Verhältnisse angesetzt werden. Es sey z. B. gegeben: Zu irgend einer Arbeit brauchen 8 Arbeiter 45 Tage, wie lange brauchen 15 Arbeiter zur nämlichen

Arbeit? Da eine größere Anzahl von Arbeitern nothwendig eher fertig wird, als eine kleinere Anzahl, so verhalten sich die Zeiten umgekehrt, wie die Menge der Arbeiter. Es ist also

$$8 : 15 = \frac{1}{45} : \frac{1}{x}.$$

Multiplicirt man nun das zweyte Verhältniß mit $45 \times x$, so erhält man

$$8 : 15 = x : 45;$$

oder, weil sich das zweyte und vierte Glied mit 15 dividiren läßt,

$$8 : 1 = x : 3$$

und folglich ist

$$x = 24.$$

Das heißt also: Wenn die Arbeiter gleich sind, so werden ihrer 15 in 24 Tagen so viel verrichten, als ihrer 8 in 45 Tagen. Man kann sich die Sache auch noch auf folgende Weise vorstellen: Wenn 8 Arbeiter 45 Tage zur Vollendung ihrer Arbeit brauchen, so machen sie mit einander in einem Tage den 45sten Theil dieser Arbeit fertig. Wenn nun 15 Arbeiter von dem nämlichen Fleiß und den nämlichen Kräften 24 Tage brauchen, so machen sie miteinander in einem Tage den 24sten Theil fertig. Die Brüche $\frac{1}{45}$ und $\frac{1}{24}$ drücken also die Arbeit eines Tages aus. Die Menge der Arbeit steht aber nothwendig im geraden Verhältniß mit der Anzahl der Arbeiter, denn je mehr Arbeiter thätig sind, desto mehr Arbeit wird geleistet. Man hat also die Proportion

$$8 : 15 = \frac{1}{45} : \frac{1}{24}.$$

Da man aber die Zahl 24 anfangs nicht weis, so hat man

$$8 : 15 = \frac{1}{45} : \frac{1}{x}.$$

Es sey noch ferner gegeben: Wenn 9 Arbeiter irgend eine Arbeit in 16 Tagen verrichten, wie lange brauchen 24 Arbeiter zur 3fachen Arbeit?

Wenn die ersten in 16 Tagen mit der einfachen Arbeit fertig werden, so vollenden sie täglich den 16ten Theil; und wenn die zweyten in x Tagen mit der 3fachen Arbeit fertig werden, so vollenden sie täglich den xten Theil dieser 3fachen Arbeit, oder drey solche Theile von der einfachen Arbeit. Die tägliche Arbeit der ersten ist also $\frac{1}{16}$, und die tägliche Arbeit der zweyten ist $\frac{3}{x}$. Die Größe der Arbeit aber, die in einem Tage fertig wird, hängt nothwendig von der Anzahl der Arbeiter ab. Man erhält also

$$9 : 24 = \frac{1}{16} : \frac{3}{x}$$

oder

$$3 : 8 = x : 48$$

oder

$$3 : 1 = x : 6$$

und also ist $x = 18$ Tage.

Ob Zahlen im geraden oder verkehrten Verhältnisse stehen, kann immer nur aus den Umständen der Aufgabe erkannt werden; es lassen sich also auch für den Ansatz und die Verbindung der Verhältnisse und Proportionen nicht solche Regeln geben, die man nur blindlings befolgen dürfte, um jedesmal den Ansatz eben so sicher zu erhalten, wie man durch Befolgung der bloßen Rechnungsregeln Summen oder Producte findet. Da aber in allen Rechnungen, welche in irgend einer wirklichen Anwendung vorkommen, nur benannte Zahlen stehen, so bleibt es immer eine wesentliche Vorsicht, zuerst zu überlegen, auf welche Art die Einheit der gesuchten Zahl in der Aufgabe vorkömmt; denn auf die nämliche Art muß das Vielfache dieser Einheit, d. h. die gesuchte Zahl vorkommen.

§. 48. Unter den wirklichen Anwendungen muß die Zinsrechnung erwähnt werden. Wenn nämlich ein Mensch einem andern die Benützung seines Geldes überläßt, so muß der letztere dem ersten für diese Bewilligung etwas bezahlen, denn er miethet eigentlich das Geld des ersten. Diese Zahlung nennt man nun den Zins oder auch das Interesse. Man hat aber bey diesen Berechnungen eine eigene benannte Einheit angenommen. Das zur Benützung überlassene Geld nennt man das Capital, und die Einheit des Capitals sind 100 Einheiten der gebräuchlichen Rechnungsmünze. Was nun von dem Capital 100 bezahlt werden muß, ist die Einheit des Zinses. Die Einheit der Zeit aber ist ein Jahr. Der Zins also, der von 100 Gulden in einem Jahre entrichtet werden muß, heißt das Procent, und das gewöhnliche Procent ist 5, d. h. man zahlt jährlich 5 fl. Zins von 100 fl. Capital, oder also den zwanzigsten Theil des Capitals. Man pflegt auch statt des Wortes Procent das Zeichen % zu schreiben.

Die erste Frage ist hier: Was beträgt jährlich der Zins eines gegebenen Capitals? Diese Frage ist am leichtesten zu beantworten, denn es verhalten sich die Zinsen, wie die Capitale. Wie sich also 100 fl. zum gegebenen Capitale verhalten, so verhält sich auch das gegebene Procent, oder der Zins von 100 fl. zum gesuchten Zins des gegebenen Capitals.

Was tragen z. B. 9748 fl. zu 5 % jährlich an Interessen? Man erhält

$$100 : 9748 = 5 : x$$

oder

$$20 : 9748 = 1 : x$$

oder

$$10 : 4874 = 1 : x.$$

Folglich ist

$$x = \frac{4874}{10} = 487{,}4 \text{ fl.} = 487 \text{ fl. } 24 \text{ kr.}$$

Man findet also den Werth des jährlichen Zinses am schnellsten, wenn man das gegebene Capital mit dem Procent als Decimalbruch ausgedrückt, multiplicirt. Was beträgt z. B. der Zins von 25378 fl. zu 4 %? Man erhält

$$\begin{array}{r} 25378 \\ 0{,}04 \\ \hline 1015{,}12 \end{array} \text{ fl.} = 1015 \text{ fl. } 7\tfrac{1}{5} \text{ kr.}$$

Ferner: Was tragen jährlich 37976 fl. zu 5 %?

$$\begin{array}{r} 37976 \\ 0{,}05 \\ \hline 1898{,}80 \end{array} \text{ fl.} = 1898 \text{ fl. } 48 \text{ kr.}$$

Wenn bey dem Capital auch noch Kreuzer stehen, so sind mit dem Procent sowohl die Gulden als die Kreuzer zu multipliciren, und die Resultate von beyden zu addiren. Wenn z. B. das jährliche Interesse von 9858 fl 44 kr. bey 5 % verlangt wird, so erhält man:

$$\begin{array}{rr} 9858 \text{ fl.} & 44 \text{ kr.} \\ 0{,}05 & 0{,}05 \\ \hline 492{,}90 \text{ fl.} & 2{,}20 \text{ kr.} \end{array}$$

also

$$\begin{array}{rr} 492 \text{ fl.} & 54 \text{ kr.} \\ & 2{,}\ 2 \\ \hline 492 \text{ fl.} & 56\tfrac{1}{5} \text{ kr.} \end{array}$$

Es ist nicht immer der Fall, daß die Zeit der Verzinsung ein ganzes Jahr ist; sondern sehr oft muß der treffende Zins für einen kleineren Zeittheil bestimmt werden. Allein auch diese Bestimmung ist leicht. Wenn z. B. für ein ganzes Jahr 4 fl. von 100 bezahlt werden, so hat man für ein halbes Jahr 2 fl., für ein Vierteljahr 1 fl., und also auch für einen Monat $\frac{4}{12}$ fl. oder $\frac{1}{3}$ fl. oder 20 kr. zu bezahlen. Es soll bestimmt werden, wie viel der Zins von

7856 fl. zu 5 % in einem Vierteljahr beträgt, so weis man zum voraus, daß er den vierten Theil des ganzen Jahreszinses ausmachen muß. Nun erhält man aber für den Jahreszins

$$\begin{array}{r} 7856 \\ 0{,}05 \\ \hline 392{,}80 \end{array} \text{ fl.}$$

Von diesem ist der vierte Theil

$$\frac{392{,}8}{4} = 98{,}2 \text{ fl.} = 98 \text{ fl. } 12 \text{ kr.}$$

Das heißt also: 7856 fl. tragen bey 5 % in einem Vierteljahr 98 fl. 12 kr. Interessen.

Noch weit häufiger wird zu wissen verlangt, wie viel die Interessen irgend eines Capitals am Ende von einer gegebenen Anzahl von Jahren betragen. Auch diese Bestimmung ist einfach und leicht. Wenn z. B. ein Capital zu 5 % angelegt ist, so tragen 100 fl. in einem Jahre 5 fl., folglich in zwey Jahren 10 fl., in drey Jahren 15 fl., in vier Jahren 20 fl., u. s. w. Man findet also das Interesse, wenn man das Capital mit dem Procent und mit der Zeit in Jahren ausgedrückt multiplicirt.

Es soll z. B. berechnet werden, wie viel an Interessen ein Capital von 11976 fl. in neun Jahren abwirft, so ist die Operation

$$\begin{array}{r} 11976 \\ 0{,}45 \\ \hline 59880 \\ 47904 \\ \hline 5389{,}20 \end{array} = 5389 \text{ fl. } 12 \text{ kr.}$$

Da die Interessen desto mehr betragen, je größer das Procent ist, und je länger die Zeit, während welcher die Verzinsung statt findet, so steht die Größe des Zinses im geraden Verhältniß mit dem Procent und zugleich im gera=

den Verhältniß mit der Zeit, folglich im geraden Verhältniß mit dem Producte aus dem Procente und der Zeit. Man könnte also nach den früheren Erklärungen eigentlich ansetzen:

$$\begin{array}{rcl} 100 : 5 &=& 11976 : x \\ 1 : 9 &=& x : y \\ \hline 100 : 45 &=& 11976 : y. \end{array}$$

Also ist wie oben

$$y = 11976 \times \frac{45}{100} = 11976 \times 0{,}45 = 5389{,}2 \text{ fl.}$$

Oder

fl. x	11976 fl.
fl. 100	9 Jahr
Jahr 1	5 fl.

Es ist auch nicht immer der Fall, daß die Interessen nur für eine Anzahl von ganzen Jahren gesucht werden, sondern es kann die Zeit in Jahren, Monaten und Tagen ausgedrückt seyn. Man soll z. B. bestimmen, wie viel 19856 fl. zu 5 Proc. in 7 Jahren 5 Monaten und 16 Tagen an Interessen tragen. Man kann hier auf dreyerley Weisen verfahren, nämlich: 1) Man verwandelt die Monate und Tage in einen Bruch des Jahres, und verfährt dann nach der bereits gefundenen Regel, nämlich man multiplicirt das Capital mit dem Procent und mit der Zeit. Dieses Verfahren ist dann gut anzuwenden, wenn sich die Monate und Tage in einen bequemen Bruch des Jahres verwandeln lassen. 2) Man stellt sich vor, es seyen drey gleiche Capitale zu dem nämlichen Procent auf verschiedene Zeiten angelegt, nämlich das erste auf ganze Jahre, das zweyte nur auf Monate, und das dritte nur auf Tage. Berechnet man also diese einzelnen Interessen, und addirt sie, so ist ihre Summe das gesuchte. 3) Man stellt sich vor, drey gleiche Capitale seyen auf ein Jahr, aber zu ver-

schiedenen Procenten angelegt. Ob die zweyte oder dritte Verfahrungsweise den Vorzug verdient, hängt zwar großentheils von der Beschaffenheit der vorkommenden Zahlen ab; im Allgemeinen aber empfiehlt sich die dritte Rechnungsweise dadurch, daß man es mit kleineren ganzen Zahlen zu thun hat.

Da solche Rechnungen sehr häufig vorkommen, so sind einige Erleichterungen in Gebrauch gekommen, durch welche ohne Beeinträchtigung der Genauigkeit das Resultat schneller und bequemer gefunden wird. Sie sind folgende: 1) Man läßt keine Unterabtheilungen von Kreuzern erscheinen, sondern nimmt für einen ganzen Kreuzer jeden Bruch, welcher $\frac{1}{2}$ oder mehr als $\frac{1}{2}$ beträgt, und vernachläßigt jeden Bruch gänzlich, welcher kleiner als $\frac{1}{2}$ ist. 2) Ein Monat ist $\frac{1}{12}$ Jahr. Da man nun im Durchschnitte den Monat zu 30 Tagen annimmt, so ist ein Tag so viel als $\frac{1}{12 \times 30}$ oder $\frac{1}{360}$ Jahr. Die Zahl 360 ist im Rechnen vorzüglich bequem, weil sie viele Divisoren hat, und da überdieß immer nur weniger als 30 Tage vorkommen können, so betrachtet man in der Zinsenrechnung das Jahr so, als bestehe es nicht aus 365, sondern nur aus 360 Tagen. Man kann sich auf folgende Weise überzeugen, daß die Genauigkeit der Rechnung nicht verkürzt wird. Ein Tag ist $\frac{1}{365}$ Jahr, und wird als $\frac{1}{360}$ angenommen. Man suche den Unterschied dieser beyden Brüche.

	26280	
$\frac{1}{360}$	73	
$\frac{1}{365}$	72	
	1	
	26280	

Rechnet

Rechnet man nun zu 5 Procent, so muß die Zeit $\frac{1}{26280}$ noch mit 5 multiplicirt werden, um zu finden, wie viel Interesse für dieselbe auf 100 fl. Capital trifft. Es ist aber

$$\frac{5}{26280} = \frac{1}{5256} \text{ fl.}$$

Da nun der Gulden in wirklicher Münze nur in 480 Theile, nämlich Heller getheilt wird, so erhält man

$$\frac{1}{5256} \text{ fl.} = \frac{480}{5256} \text{ hl.} = \frac{20}{219} \text{ hl.}$$

Der Fehler beträgt also bey 219 Rechnungstagen erst 20 hl., und folglich sehr nahe in 11 Tagen 1 hl.

Nun soll das oben angegebene Beyspiel nach allen drey Verfahrungsarten berechnet werden. Man soll also den Betrag der Interessen von 19856 fl. zu 5 Procent für die Zeit von 7 Jahren, 5 Monaten und 16 Tagen bestimmen.

1) Anstatt 7 Jahre, 5 Monate und 16 Tage setze man

$$7, \frac{5}{12}, \frac{16}{360} \text{ Jahre}$$

oder

$$7, \frac{5}{12}, \frac{2}{45} \text{ Jahre.}$$

Addirt man die beyden Brüche, so erhält man

$$7\frac{83}{180} \text{ Jahre} = \frac{1343}{180} \text{ Jahre.}$$

Folglich wird der gesuchte Zins

$$\frac{19856 \times 0{,}05 \times 1343}{180} \text{ fl.}$$

oder, wenn man mit 5 verkleinert,

$$\frac{19856 \times 0{,}01 \times 1343}{36} \text{ fl.}$$

oder, wenn man noch mit 4 verkleinert,

$$\frac{4964 \times 0{,}01 \times 1343}{9} \text{ fl.}$$

$$\begin{array}{r} 1343 \\ 49{,}64 \\ \hline 5372 \\ 8058 \\ 12087 \\ 5372 \\ \hline 66666{,}52 \end{array}$$

$$\frac{66666{,}52}{9} = 7407{,}391 \text{ fl.} = 7407 \text{ fl. } 23 \text{ kr.}$$

2) Nach der zweyten Methode hat man sich vorzustellen, es seyen drey Capitale, jedes von 19856 fl. und zu 5 Proc., angelegt, das erste auf 7 Jahre, das zweyte auf 5 Monate, und das dritte auf 16 Tage. Man erhält also

für das erste $19856 \times 7 \times 0{,}05 = 19856 \times 0{,}35$ fl.

$$\begin{array}{r} 19856 \\ 0{,}35 \\ \hline 99280 \\ 59568 \\ \hline 6949{,}60 \end{array} \text{ fl.} = 6949 \text{ fl. } 36 \text{ kr.}$$

für das zweyte $\frac{19856 \times 5 \times 0{,}05}{12} = \frac{4964 \times 0{,}25}{3}$ fl.

$$\begin{array}{r} 4964 \\ 0{,}25 \\ \hline 24820 \\ 9928 \\ \hline 1241{,}00 \end{array}$$

$$\frac{1241{,}00}{3} = 413{,}67 \text{ fl.} = 413 \text{ fl. } 40 \text{ kr.}$$

für das dritte $\frac{19856 \times 2 \times 0{,}05}{45} = \frac{19856 \times 2 \times 0{,}01}{9}$

$$\begin{array}{r} 19856 \\ 0{,}02 \\ \hline 397{,}12 \end{array}$$

$$\frac{397{,}12}{9} = 44{,}12 \text{ fl.} = 44 \text{ fl. } 7 \text{ kr.}$$

Also	6949,60	. . .	6949 fl. 36 kr.
	413,67	. . .	413 „ 40 „
	44,12	. . .	44 „ 7 „
	7407,39 fl.	=	7407 fl. 23 kr.

3) Nach der dritten Verfahrungsweise stellt man sich vor, es seyen drey Capitale, jedes von 19856 fl. auf ein Jahr angelegt, aber jedes zu einem anderen Procent. Wenn nämlich ein Capital zu 5 Proc. auf 7 Jahre angelegt ist, so ist es eben so viel, als wäre es zu 35 Proc. auf ein Jahr angelegt. Wenn ferner ein Capital zu 5 Procent auf $\frac{5}{12}$ Jahre angelegt ist, so ist es eben so viel, als wäre es auf ein ganzes Jahr zu $\frac{25}{12}$ oder $2\frac{1}{12}$ Procent angelegt. Und wenn endlich ein Capital zu 5 Proc. nur 16 Tage liegt, so trägt es eben so viel Zins, als wenn es ein ganzes Jahr zu $\frac{10}{45}$ oder $\frac{2}{9}$ Procent läge. Es soll also das Capital von 19856 fl. ein ganzes Jahr

zu 35
und $2\frac{1}{12}$
und $\frac{2}{9}$

also zu $37\frac{11}{36}$ Procent liegen. Man erhält aber

für 37 Proc.

$$\begin{array}{r} 19856 \\ 0,37 \\ \hline 138992 \\ 59568 \\ \hline 7346,72 \end{array} \text{ fl.} = 7346 \text{ fl. } 43 \text{ kr.}$$

für $\frac{11}{36}$ Proc. $\frac{19856 \times 11}{3600} = \frac{4964 \times 11}{900}$

$$\begin{array}{r} 4964 \\ 11 \\ \hline 4964 \\ 4964 \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{546,04}{9} = 60,67 \text{ fl.} = 60 \text{ fl. } 40 \text{ kr.}$$

Der ganze Zins ist also = 7407 fl. 23 kr.

Da man bey dieser dritten Verfahrungsweise den grossen Zahlen am meisten ausweicht, so ist sie auch die üblichste geworden, obgleich man dabey großentheils mit gemeinen Brüchen rechnet, und die Herstellung gleicher Nenner auf keine Weise vermeiden kann. Es sey noch folgendes Beyspiel zu berechnen, welches die bisher abgehandelten Fälle zugleich enthält. Man sucht die Interessen von 29317 fl. 47 kr. zu $5\frac{1}{2}$ Procent für die Zeit von 5 Jahren, 7 Monaten und 19 Tagen. Verfährt man nun nach der dritten Regel, so erhält man

statt $5\frac{1}{2}$ Proc.	in 5 Jahren	. .	$27\frac{1}{2}$ Proc. für ein Jahr
"	in $\frac{7}{12}$ Jahren	. .	$3\frac{5}{24}$ " " " "
"	in $\frac{19}{360}$ Jahren	.	$\frac{209}{720}$ " " " "

Die drey Brüche geben

	720	
$\frac{1}{2}$	360	360
$\frac{5}{24}$	30	150
$\frac{209}{720}$	1	209
		719
		720

Man hat also nun die Interessen von 29317 fl. 47 kr. zu $30\frac{719}{720}$ Procent für ein Jahr zu suchen. Man erhält

für 30 Procent	29317 fl.	47 kr.	8795 fl. 6 kr.
	0,3	0,3	14
	8795,1	14,1	8795 fl. 20 kr.

für $\frac{719}{720}$ Procent 29317

719

263853

29317

205219

21078|923 | 292,76 fl. = $\frac{292 \text{ fl. } 46 \text{ kr.}}{9088 \text{ fl. } 6 \text{ kr.}}$

72 |000

144

667

72

648

198

72

144

549

72

504

452

72

432

20

Da $\frac{719}{720}$ noch immer kleiner als 1 ist, ein ganzes Procent von 47 kr. aber nur 0,47 kr. ausmacht, also weniger als $\frac{1}{2}$ kr., so ist zur oben gefundenen Summe von 9088 fl. 6 kr. nichts mehr hinzuzusetzen.

§. 49. In den Rechnungen, welche bisher dargestellt wurden, kommen immer vier verschiedene Zahlen vor, nämlich 1) das Capital, 2) der Zins, 3) das Procent, und 4) die Zeit. Von diesen vier Zahlen können abwechselnd drey bekannt seyn, und die vierte gesucht werden. Bey den vorausgehenden Rechnungen waren das Capital, das Procent und die Zeit bekannt, und der Zins wurde gesucht. Es sind also noch folgende drey Aufgaben möglich, nämlich: 1) Es ist das Interesse, das Procent und die Zeit bekannt, und man sucht das entsprechende Capital; 2) es sind Capital, Procent und Interesse bekannt, und man

sucht die Zeit; 3) es sind Capital und Interesse und die Zeit bekannt, und man sucht das Procent. Diese drey Aufgaben sind also noch zu lösen.

Es sey also zuerst das Interesse, das Procent und die Zeit bekannt, und werde das entsprechende Capital gesucht, und es sey zuerst die Zeit nur ein Jahr. Es werde z. B. gefragt, wie groß das Capital ist, das bey $4\frac{1}{2}$ Procent in einem Jahre 896 fl. Interessen trägt. Da das Procent nichts anderes ist, als der Zins, der von 100 fl. gezahlt werden muß, so erhält man die Proportion:

$$4\tfrac{1}{2} : 100 = 896 : x$$

oder

$$4\tfrac{1}{2} : 896 = 100 : x$$

d. h. die Zinsen verhalten sich gerade wie die Capitalien. Es ist folglich

$$x = \frac{896 \times 100}{4\frac{1}{2}} = \frac{89600}{4,5} = \frac{17920}{0,9} = 19911,11 \text{ fl.} = 19911 \text{ fl. } 7 \text{ kr.}$$

Wenn also die Zeit ein Jahr ist, so findet man das gesuchte Capital, wenn man das gegebene Interesse mit dem Procente dividirt.

Wenn daher die Zeit nicht ein Jahr ist, sondern mehr oder weniger, so hat man nur das Procent zu suchen, das einem Jahr entspricht. Es soll z. B. bestimmt werden, welches Capital in 8 Jahren bey $3\frac{3}{4}$ Procent 3268 fl. Interessen trägt. Wenn von 100 fl. in einem Jahre $3\frac{3}{4}$ fl. bezahlt werden, so werden in 8 Jahren 30 fl. bezahlt. Es ist daher gleich viel, 100 fl. zu $3\frac{3}{4}$ Procent 8 Jahre liegen zu lassen, oder zu 30 Procent nur ein Jahr. Man hat also die oben angesetzte Aufgabe nun auf folgende zurück geführt: Ein Capital zu bestimmen, das zu 30 Procent in einem Jahre 3268 fl. Zinsen trägt; und man erhält das gesuchte Capital $= \frac{3268}{0,3} = 10893,33$ fl. $= 10893$ fl. 20 kr.

Nun läßt sich die Regel, nach welcher die vorliegende Aufgabe gelöset wird, vollständig auf folgende Weise aussprechen: „Wenn die Interessen, die Zeit und das Procent bekannt sind, so findet man das entsprechende Capital, wenn man die Interessen mit dem Producte aus der Zeit und dem Procente dividirt.“

Es sey noch als Beyspiel verlangt, das Capital anzugeben, welches 936 fl. 36 kr. bey $5\frac{1}{4}$ Proc. in 3 Jahren, 9 Monaten und 18 Tagen trägt. Anstatt 9 Monaten setzt man $\frac{3}{4}$ Jahre, und statt 18 Tagen setzt man $\frac{18}{360}$ oder $\frac{1}{20}$ Jahr. Die zwey Brüche $\frac{3}{4}$ und $\frac{1}{20}$ aber geben miteinander $\frac{16}{20}$ oder $\frac{4}{5}$. Die ganze Zeit ist also $3\frac{4}{5}$ Jahre, oder $\frac{19}{5}$ Jahre. Das Procent $5\frac{1}{4}$ giebt $\frac{21}{4}$. Das Product aus der Zeit und dem Procente ist daher

$$\frac{19}{5} \times \frac{21}{4} = \frac{19 \times 21}{20}.$$

Für das gesuchte Capital erhält man nun

$$\frac{936,6 \times 20 \times 100}{19 \times 21} = \frac{93660 \times 20}{19 \times 21} = \frac{4460 \times 20}{19}$$

```
 4460
   20
 ─────
 89200 | 4694 fl. 44 kr.
 19
 76
 ─────
 132
  19
 114
 ─────
  180
   19
  171
 ─────
    90
    19
    76
 ─────
    14
    60
 ─────
   840
    19
    76
 ─────
    80
    19
    76
 ─────
     4
```

Die nächste Aufgabe ist nun, die Zeit zu bestimmen, wenn Capital, Interessen und Procent gegeben sind. Da das Capital und das Procent bekannt sind, so findet man das Interesse, welches das gegebene Capital in einem Jahre trägt. Dann verhält sich das einjährige Interesse zu einem Jahr, wie das gegebene Interesse zur gesuchten Zeit. Man findet also die gesuchte Zeit, wenn man das gegebene Interesse durch das einjährige Interesse dividirt. Da aber das einjährige Interesse durch das Product aus dem Capital in das Procent ausgedrückt ist, so findet man allgemein die Zeit, wenn man das gegebene Interesse durch das Product aus dem Capital und dem Procente dividirt. Es sey z. B. zu wissen verlangt, wie lange 5748 fl. zu 5 Procent liegen müssen, bis der Zins 3736 fl. 12 kr. ausmacht. Nach der eben ausgesprochenen Regel erhält man

$$\frac{3736,2}{5748 \times 0,05} = \frac{3736,2}{287,4} = 13$$

Das angegebene Capital muß folglich 13 Jahre liegen.

Es sey noch zu wissen verlangt, wie lange ein Capital von 9736 fl. 48 kr. zu $4\frac{3}{4}$ Procent liegen muß, bis es 8000 fl. 36 kr. einträgt. Man erhält

$$\frac{8000,6}{9736,8 \times 0,0475} \text{ Jahre.}$$

Um diese Rechnung bequemer auszuführen, unterlasse man die Multiplication im Nenner, und verrichte zwey Divisionen. Auf diese Art erhält man:

```
  8000,6
   9736,8 | 0,8217 | 17 Jahre, 3 Monate, 18 Tage.
  77894     0,0475
  -----    ------
  2112      3467
   9736      475
  1947      3325
  -----    ------
   165       142
    973       12
   ----    ------
    68       284
     97     142
    68     ------
   ----     1704
             475 | 3 Monate.
            1425
           ------
             279
              30
           ------
            8370
             475 | 17 Tage.
           ------
            3620
             475
            3325
           ------
             295
           ------ = 59/95.
             475
```

Nun ist noch das Procent zu bestimmen, wenn das Capital, die Interessen und die Zeit gegeben sind. Es soll z. B. angegeben werden, zu wie viel Procent ein Capital von 22400 fl. angelegt ist, wenn die Interessen desselben in 16 Jahren 17920 fl. ausmachen. Man weiß zuerst, daß die Interessen im geraden Verhältniß mit der Zeit stehen, und man findet also durch folgende Proportion die Interessen, die in einem Jahre fließen; nämlich

$$16 : 1 = 17920 : x.$$

Da nun das Procent nichts anderes ist, als das einjährige Interesse von 100 fl., und die Interessen sich gerade verhalten, wie die Capitale, so erhält man nachfolgende Proportion:

$$x : 22400 = y : 100.$$

Setzt man nun diese beyden Proportionen zusammen, so erhält man:

$$\begin{array}{rcl} 16 : 1 &=& 17920 : x \\ y : 100 &=& x : 22400 \\ \hline 16\,y : 100 &=& 17920 : 22400 \end{array}$$

oder

$$y : 100 = 1120 : 22400$$

und also

$$y = \frac{112000}{22400} = \frac{1120}{224} = 5.$$

Betrachtet man diese Auflösung genau, so führt sie auf folgende Regel: „Man findet das Procent, wenn man das 100fache Interesse mit dem Producte aus dem Capitale in die Zeit dividirt."

Zu wieviel Procent ist z. B. ein Capital von 45936 fl. angelegt, wenn es in 8 Jahren, 6 Monaten und 20 Tagen 18962 fl. 54 kr. eingetragen hat. Hier geben 6 Monate und 20 Tage

$\frac{1}{2}$ Jahr und $\frac{1}{18}$ Jahr,

zusammen also $\frac{10}{18}$ oder $\frac{5}{9}$ Jahr.

Die ganze Zeit ist daher $8\frac{5}{9}$ oder $\frac{77}{9}$ Jahre. Das gesuchte Procent wird also

$$\frac{18962{,}9 \times 100 \times 9}{45936 \times 77} = \frac{1896290}{5104 \times 77}.$$

Es ist hier wieder bequemer, zwey Divisionen zu machen, anstatt die Multiplication im Nenner zu verrichten. Diese Rechnung ist:

1896290	371,53	$4,825 = 4\frac{33}{40}$
5104	77	
15312	308	
36509	635	
5104	77	
35728	616	
7810	193	
5104	77	
2706	154	
5104	39	
2552	77	
154	39	
510		
153		
1		

Das angegebene Capital liegt also zu $4\frac{33}{40}$ Procent.

§. 50. Wenn von 100 fl. jährlich 5 fl. als Zinsen bezahlt werden, so hat der Besitzer des Capitals am Ende des Jahres 105 fl. Er hat eben deswegen am Ende des zweyten Jahres 110 fl.; am Ende des dritten 115 fl., u. s. f. Es kann also gefragt werden, wie viel ein gegebenes Capital sammt seinen Zinsen nach Verfluß einer gegebenen Zeit ausmacht. Diese Aufgabe führt zu der Proportion: 100 fl. verhalten sich zu 105 fl., wie das gegebene Capital zur vierten gesuchten Zahl. Z. B. Was machen Capital und Interessen am Ende eines Jahres bey $5\frac{1}{2}$ Procent, wenn das Capital 36748 fl. ist? Dafür hat man die Proportion

$$100 : 105,5 = 36748 : x$$

oder

$$1 : 1,055 = 36748 : x$$

folglich ist

$$x = 36748 \times 1,055 = 38769,14 \text{ fl.} = 38769 \text{ fl. } 8 \text{ kr.}$$

Da nun in diesem Beyspiele aus 1 fl. am Ende des Jahres 1,055 fl. wird, so kann man die Regel auf folgende Weise ausdrücken: „Man sucht, was in der gegebenen Zeit und

bey dem gegebenen Procent aus 1 Gulden wird, und mit dieser Zahl multiplicirt man das gegebene Capital." Was beträgt z. B. nach 7 Jahren 9 Monaten ein Capital von 79836 fl. bey 4 % sammt seinen Zinsen?

Die gegebene Zeit ist $7\frac{3}{4}$ Jahre, oder 7,75 Jahre. Es ist aber in Bezug auf den Betrag der Zinsen einerley, ob das Capital zu 4 Procent $7\frac{3}{4}$ Jahre liegt, oder nur 1 Jahr zu 31 Procent. Am Ende der gegebenen Zeit wird also aus jedem Gulden 1,31 fl. Man erhält also

$$\begin{array}{r} 79836 \\ 1{,}31 \\ \hline 79836 \\ 239508 \\ 79836 \\ \hline 104585{,}16 \end{array}$$

104585,16 fl. = 104585 fl. 10 kr.

Diese Aufgabe kömmt aber auch umgekehrt vor. Wenn nämlich bekannt ist, wie groß die Summe aus Capital und Interessen ist, wie lange das Capital liegt, und zu wieviel Procent es angelegt wurde, so kann gefragt werden, wie groß dasselbe ursprünglich war.

Es sey z. B. gegeben: Ein Capital liegt 15 Jahre zu 5 Procent, und in dieser Zeit ist aus Capital und Interessen die Summe von 2976211 fl. entstanden; wie groß ist das angelegte Capital gewesen? Zuerst sieht man, daß es einerley ist, ob ein Capital 15 Jahre zu 5 % liegt, oder nur 1 Jahr zu 75 %. Es ist folglich aus jedem Gulden 1,75 fl. geworden; oder aus jedem 100 fl. sind 175 fl. geworden. Man hat daher die Proportion

$$175 : 100 = 2976211 : x$$

oder

$$1{,}75 : 1 = 2976211 : x$$

und folglich ist

$$x = \frac{2976211}{1{,}75} = 1700692 \text{ fl.}$$

Aus diesem Verfahren sieht man nun leicht, welche Regel zu befolgen ist. Man sucht nämlich zuerst, was in der gegebenen Zeit aus einem Gulden geworden seyn muß. Mit diesem Werthe wird die Zahl, welche die Summe aus Capital und Interessen ausdrückt, dividirt, und der Quotient ist dann das gesuchte Capital.

Es sey noch als weiteres Beyspiel die Frage gegeben: Wie groß ist das Capital, welches mit seinen Interessen in einem Jahre bey 5 % 100 fl. macht? Hier wird aus jedem Gulden 1,05 fl.; und folglich ist das gesuchte Capital

$$= \frac{100}{1{,}05} = 95\frac{5}{21} \text{ fl.} = 95 \text{ fl. } 14 \text{ kr. } 1 \text{ pf.}$$

Diese Aufgabe erscheint am öftesten unter der Form von folgender Frage: Wenn jemand schuldig ist, am Ende eines Jahres 100 fl. zu bezahlen, wie viel ist er zu zahlen schuldig, ohne daß er oder sein Gläubiger Schaden leidet, wenn er sich seiner Verbindlichkeit gleich am Anfange des Jahres entledigen will? Wenn der Schuldner seinem Gläubiger, anstatt ihm am Ende eines Jahres 100 fl. zu geben, gleich am Anfang des Jahres 95 fl. 14 kr. 1 pf. giebt, so hat er seine Obliegenheit erfüllt, wenn 5 Procente angenommen werden, denn er giebt dem Gläubiger eine Summe Geld, aus welcher bis zum Schlusse des Jahres 100 fl. werden, wenn sie der Gläubiger sogleich weiter ausleihet. Diese Aufgabe macht die Rabattrechnung aus, indem man das den Rabatt nennt, um was man in der Gegenwart weniger zahlt, als man in der Zukunft zahlen müßte.

Was ist z. B. bey 5 % Rabatt die Summe von 8796 fl. jetzt werth, wenn sie erst nach einem Jahre bezahlt werden müßte. Man erhält

$$\frac{8796}{1{,}05} \text{ fl.} = 8377\tfrac{1}{7} \text{ fl.} = 8377 \text{ fl. } 8 \text{ kr. } 5 \text{ hl.}$$

Da $8377\frac{1}{7}$ fl. nach Ablauf eines Jahres bei 5 % zu 8796 fl.

anwachsen, so ist es gleichviel, $8377\frac{1}{7}$ fl. jetzt zu geben, oder 8796 fl. nach einem Jahre.

Es ist auch bey der Rabattrechnung gerade nicht nothwendig, daß die Zeit ein Jahr sey. Was ist z. B. die Summe von 9846 fl. jetzt werth, wenn sie erst nach 7 Jahren bezahlt, unterdessen aber mit 5 % verzinset werden muß? Es ist vor allem gleichgültig, ob ein Capital zu 5 % 7 Jahre liegt, oder nur 1 Jahr zu 35 %. In beyden Fällen wird aus 1 Gulden 1,35 fl.; und der gesuchte baare Werth ist also

$$\frac{9846}{1,35} = 7293\tfrac{1}{3} \text{ fl.} \neq 7293 \text{ fl. } 20 \text{ kr.}$$

Es kömmt diese Frage auch öfters vor, ohne daß eine Zeit benannt ist. Man sollte dann eigentlich Disconto anstatt Rabatt sagen. Gerechnet wird aber gerade so, als ob die Zeit 1 Jahr wäre. Es ist indessen anzumerken, daß dieses Verfahren nicht immer befolgt wird. Wenn z. B. gesagt ist, es werden 5 % Rabatt gegeben, so heißt dieses oft auch, man verlange nicht die ganze Summe als Zahlung, sondern nur 95 Procent. Die Resultate aus diesen beyden Verfahrungsarten sind nothwendig verschieden, und es muß also jedesmal erklärt werden, welche anzuwenden ist. Es seyen z. B. 8960 fl. mit 5 Procent Rabatt zu zahlen, so erhält man nach der ersten Verfahrungsweise

$$\frac{8960}{1,05} = 8533\tfrac{1}{3} \text{ fl.} = 8533 \text{ fl. } 20 \text{ kr.}$$

und nach der zweyten

$$8960 \times 0,95 = 8512 \text{ fl.}$$

Man nennt zum Unterschiede das erste Verfahren die Rabatt- oder Discontorechnung Auf 100, und die zweyte In 100. (Im französischen nennt man die erste Rechnungsart Escompte en dedans und die zweyte Escompte en dehors.)

Das zweyte Verfahren ist eigentlich im Allgemeinen unrichtig, und ist bloß in einigen Rechnungen durch Gewohnheit eingeführt. Am häufigsten wird von dem zweyten Verfahren Gebrauch gemacht, wenn bey Verkäufen von Waaren im Preise ein Unterschied angenommen wird, je nachdem der Käufer sogleich baar bezahlt, oder erst nach einiger Zeit. Auch bringt dieses Verfahren dem Käufer Vortheil, welcher baare Zahlung leistet.

§. 51. Mit den bisher behandelten Aufgaben hängt die Frage nach dem mittlern Zahlungstermin zusammen. Wenn nämlich mehrere einzelne Capitale zu verschiedenen Zeiten heimgezahlt, und unterdessen zu gleichen Procenten verzinset werden sollen, so kann die Frage entstehen, zu welcher Zeit die Summe der einzelnen Capitale zurück gezahlt werden müßte, ohne daß weder der Schuldner noch der Gläubiger Nutzen oder Schaden hat. Man kann die einzelnen Interessen berechnen und addiren, dann soll die Summe der Capitale in der gesuchten Zeit die nämlichen Interessen tragen. Multiplicirt man nun die Summe der Capitale mit dem Procent, um die Interessen eines Jahres zu erhalten, so findet man die gesuchte Zeit, wenn man die Summe der einzelnen Interessen mit dem Jahreszins der Summe der Capitale dividirt. Da aber bey diesem Verfahren das Procent im Dividende und im Divisor steht, so kann es aus der Rechnung wegbleiben. Man findet also die gesuchte Zeit: „wenn man die Summe der Producte aus den einzelnen Capitalen in ihre Zeiten mit der Summe der Capitale dividirt.“

Es seyen z. B.

1800	fl.	nach	5	Jahren
2400	=	=	3	=
3500	=	=	4	=
4300	=	=	6	= zu zahlen; so ist die

Summe der Capitale = 12000 fl.

und $1800 \times 5 = 9000$
$2400 \times 3 = 7200$
$3500 \times 4 = 14000$
$4300 \times 6 = 25800$

56000

Die gesuchte Zeit ist folglich $= \frac{56000}{12000} = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$ Jahre. Es ist also ganz gleichgiltig, ob man die einzelnen Capitale zu den angegebenen verschiedenen Zeiten bezahlt, oder die Summe der Capitale, nämlich 12000 fl. nach $4\frac{2}{3}$ Jahren, weil in beyden Fällen gleiche Interessen fließen, wenn die Procente gleich sind, und zwar mögen diese groß oder klein seyn. Rechnet man z. B. mit 5 Procent, so macht der Zins

von 1800 fl.	in 5 Jahren	450 fl.
2400	„ 3 „	360
3500	„ 4 „	700
4300	„ 6 „	1290

Summe der Zinsen = 2800

Der Jahreszins von 12000 fl. ist 600 fl., folglich beträgt der Zins in $\frac{14}{3}$ Jahren $\frac{14 \times 600}{3} = 14 \times 200 = 2800$ fl.

Es sey noch folgendes Beyspiel gegeben. Es seyen

7540 fl.	nach 3 Jahren	4 Monaten	
2790	„ 6	„ 8	„
5470	„ 5	„ 3	„
4960	„ 7	„ 6	„ zu zahlen.

Summe der Capitale = 20760 fl.

$$\frac{7540 \times 10}{3} = \frac{75400}{3} = 25133\frac{1}{3}$$

$$\frac{2790 \times 20}{3} = \frac{55800}{3} = 18600$$

5470

$$\frac{5470 \times 21}{4} = \frac{114870}{4} = 28717\tfrac{1}{2}$$

$$\frac{4960 \times 15}{2} = \frac{74400}{2} = \frac{37200}{109650\frac{5}{6}} = \frac{657905}{6}$$

Die gesuchte Zeit ist also

$$= \frac{657905}{6 \times 20760} = \frac{131581}{6 \times 4152} = \frac{131581}{24912} = 5\frac{7021}{24912} \text{ Jahre,}$$

$$= 5 \text{ Jahre } 3 \text{ Monate } 11\tfrac{159}{346} \text{ Tage.}$$

Da der Bruch $\frac{159}{346}$ kleiner ist als $\frac{1}{2}$, so braucht er nicht beachtet zu werden, und die gesuchte Zeit ist also: 5 Jahre, 3 Monate, 11 Tage.

§. 52. In der vorigen Aufgabe wären die Zeiten ungleich, aber die Procente gleich, und es wurde die mittlere Zeit, oder der mittlere Zahlungstermin gesucht. Wenn aber die Zeiten gleich, und die Procente ungleich sind, so läßt sich nach dem mittleren Procente fragen. Man kann die Interessen der einzelnen Capitale berechnen und addiren. Diese nämliche Summe von Interessen soll nun die ganze Summe der Capitale in der gegebenen Zeit tragen, wenn alle zu einerley Procent angelegt sind. Multiplicirt man also die Summe der Capitale mit der gegebenen Zeit, und dividirt mit diesem Producte die Summe der Interessen, so findet man das Procent. Da aber bey diesem Verfahren die Zeit im Dividende und im Divisor steht, so braucht sie nicht beachtet zu werden. Man findet also das gesuchte mittlere Procent, wenn man die Summe der Producte der einzelnen Capitale in ihre Procente mit der Summe der Capitale dividirt. Oder: „Man findet das gesuchte mittlere Procent, wenn man die Summe der Jahreszinsen der einzelnen Capitale durch die Summe der Capitale dividirt.“

Es liegen z. B.

1800 fl.	zu 3	Procent	. . . Jahreszins	= 54 fl.
2400	„ „ 4	„	. . . .	96
3500	„ „ 2	„	. . . .	70
4300	„ „ 5	„	. . . .	215
Summe der Kapitale = 12000 fl.			S. d. Jahreszinsen	= 435 fl.

Man erhält also $\frac{435}{12000} = \frac{29}{800} = \frac{29}{8 \times 100}$

Man hat also $\frac{29}{800}$ vom ganzen Capitale als Jahreszins anzusetzen, oder $\frac{29}{8} = 3\frac{5}{8}$ Procent. Wenn also die einzelnen Capitale sämmtlich zu $3\frac{5}{8}$ Procent angelegt werden, so tragen sie zusammen in gleichen Zeiten eben so viel Interessen, als jetzt bey den verschiedenen Procenten.

Wenn also die Zeiten gleich sind, giebt es ein mittleres Procent, und wenn die Procente gleich sind, giebt es eine mittlere Zeit.

Aus den vorausgehenden zwei Aufgaben sieht man, daß sich weder ein mittlerer Zahlungstermin, noch ein mittleres Procent angeben läßt, wenn die einzelnen Zeiten und Procente zugleich verschieden sind.

Die Repartitions- oder Gesellschaftsrechnung.

§. 53. Wenn eine Zahl in mehrere ungleiche Theile getheilt werden soll, und wenn zugleich gegeben ist, in welchem Verhältnisse diese Theile unter sich stehen sollen, so nennet man das Verfahren, durch welches die verlangten Theile gefunden werden, die Repartitionsrechnung oder Gesellschaftsrechnung.

Es sey z. B. verlangt, die Zahl 10000 in vier Theile zu zerlegen, welche sich wie die Zahlen 5, 7, 9, 11 verhalten. Wenn also die oben angesetzte Zahl etwa Gulden ausdrückt, so heißt die Aufgabe so viel als: So oft der erste

Theilhaber 5 fl. empfängt, soll der zweyte 7, der dritte 9, und der vierte 11 fl. erhalten. Der Zahlmeister muß folglich jedesmal 32 fl. in die Hand nehmen, so oft er jedem seinen Theil geben soll, und muß damit so lange fortfahren, bis die 10000 fl. ausgetheilt sind. Dieses führet also dahin, die gegebenen Verhältnißzahlen als Zähler von Brüchen anzusehen, deren gemeinschaftlicher Nenner die Summe aller jener Zahlen ist. Multiplicirt man dann die zu theilende Zahl mit jedem einzelnen Bruche, so erhält man die gesuchten Theile selbst. In dem angesetzten Beyspiele erhält also

der erste	$\frac{5}{32}$	von 10000	, oder $1562\frac{1}{2}$
der zweyte	$\frac{7}{32}$	= =	, oder $2187\frac{1}{2}$
der dritte	$\frac{9}{32}$	= =	, oder $2812\frac{1}{2}$
der vierte	$\frac{11}{32}$	= =	, oder $3437\frac{1}{2}$

und folglich alle zusammen $\frac{32}{32}$, oder . . . 10000

Es soll noch die Summe von 7936 fl. unter drey Empfänger so vertheilt werden, daß sich die Theile wie die Zahlen 15, 31, 47 verhalten. Die Summe dieser drey Zahlen ist 93. Folglich erhält der erste

	$\frac{15}{93} \times 7936$ . . .	oder 1280 fl.
der zweyte	$\frac{31}{93} \times 7936$ . . .	oder 2645 fl. 20 kr.
der dritte	$\frac{47}{93} \times 7936$ . . .	oder 4010 fl. 40 kr.
		Summe = 7936 fl. — kr.

Es können auch Fälle vorkommen, in welchen die Verhältnißzahlen Brüche sind. Durch diesen Umstand wird aber am ganzen Verfahren nichts geändert; denn wenn man die gegebenen Brüche auf gleichen Nenner bringt, und addirt, so muß nun das Ganze in so viele Theile getheilt werden, als der Zähler des Summenbruches Einheiten enthält, und jeder einzelne Theilhaber erhält so viele solcher einzelner Theile, als bey der Addition der Zähler seines

entsprechenden Bruches Einheiten enthält. Es soll z. B. die Zahl 1000 in drey Theile getheilt werden, welche sich wie die Zahlen $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$ verhalten. Die Addition dieser Brüche giebt

	60	
$\frac{2}{3}$	20	40
$\frac{3}{4}$	15	45
$\frac{4}{5}$	12	48
		133

und nun erhält der erste

$$\frac{40}{133} \times 1000 = 300\frac{100}{133} = 300 \text{ fl. } 45 \text{ kr.}$$

der zweyte $\frac{45}{133} \times 1000 = 338\frac{46}{133} = 338$ fl. 21 kr.

der dritte $\frac{48}{133} \times 1000 = 360\frac{120}{133} = 360$ fl. 54 kr.

Summe = 1000 = 1000 fl. — kr.

Die Ungleichheit der verlangten Theile kann aber auch noch dadurch ausgedrückt seyn, daß angegeben ist, um wie viel ein Theil größer ist als ein anderer. Es soll wieder die Summe von 1000 fl. unter drey Theilhaber vertheilt werden, es soll aber der zweyte um 30 fl. mehr als der erste, und der dritte um 20 fl. weniger als der erste bekommen. Da hier der zweyte nicht bloß so viel als der erste bekommen soll, sondern noch 30 fl. darüber, so heißt dieses eben so viel als: diese 30 fl. müssen dem zweyten schon vor der Theilung gegeben werden; wenn dann die noch übrigen 970 fl. vertheilt werden, sollen die Antheile des ersten und des zweyten gleich seyn. Da aber der dritte um 20 fl. weniger bekommen soll, als der erste, so bekömmt er um 50 fl. weniger als der zweyte. Dieses heißt also so viel als: man soll dem ersten zwanzig, und dem zweyten fünfzig Gulden

vor der Theilung ausbezahlen, und die dann noch übrigen 930 fl. sollen unter alle drey gleich vertheilt werden. Es erhält folglich der dritte 310 fl., der erste 330 fl., und der zweyte 360 fl.

Es sey noch verlangt, 10000 fl. unter fünf Theilhaber so zu vertheilen, daß sich die Antheile der ersten drey verhalten, wie die Zahlen $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, der vierte soll um 40 fl. mehr als der erste, und der fünfte um 60 fl. mehr als der zweyte erhalten. Es müssen also 100 fl. schon vor der Theilung vergeben werden, dann bleiben noch 9900 fl., welche im Verhältniß der Zahlen

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{4}{5},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3}$$

vertheilt werden müssen. Die Addition der Brüche giebt

	30	
$\frac{1}{2}$	15	15
$\frac{2}{3}$	10	20
$\frac{4}{5}$	6	24
$\frac{1}{2}$	15	15
$\frac{2}{3}$	10	20
		94

Und nun erhält

$$\text{der erste } \frac{15}{94} \times 9900 = 1579 \text{ fl. } 47 \text{ kr.}$$

$$\text{der zweyte } \frac{20}{94} \times 9900 = 2106 \text{ „ } 23 \text{ „}$$

$$\text{der dritte } \frac{24}{94} \times 9900 = 2527 \text{ „ } 40 \text{ „}$$

$$\text{der vierte } \frac{15}{94} \times 9900 + 40 = 1619 \text{ „ } 47 \text{ „}$$

$$\text{der fünfte } \frac{20}{94} \times 9900 + 60 = 2166 \text{ „ } 23 \text{ „}$$

Summe = 10000 fl. — kr.

§. 54. Am öftesten kömmt die Repartitionsrechnung in Bezug auf Geld zur Anwendung, um Gewinn oder Verlurst auszumitteln, welcher auf einzelne Capitale trifft, deren mehrere zur Erreichung eines Zweckes verwendet werden. Hier kann nun zwar von einem Procent keine Rede seyn, indem der eventuelle Gewinn mehr als gewöhnliche Verzinsung abwerfen soll, aber die Zeit, während welcher ein Capital der Benützung überlassen blieb, muß nothwendig berücksichtigt werden, sobald nicht alle Capitale für die nämliche Zeitdauer hergegeben werden. Es beginnt z. B. jemand eine Unternehmung, und verwendet dazu 5700 fl. Nach Verfluß von 1 Jahre gesellt sich ihm ein zweyter mit 6900 fl. bey, und noch weiter nach 8 Monaten ein dritter mit 9000 fl. Von jetzt an nach 16 Monaten sey das Geschäft vollendet. Jeder zieht sein Geld zurück, und es bleiben 20000 fl. als Gewinn zu vertheilen. Hier kann der Antheil am Gewinn offenbar nicht im Verhältniß mit dem bloßen ausgelegten Capitale liegen, sonst würde derjenige einen unverhältnißmäßigen Vortheil genießen, der das seinige auf die kürzeste Zeit hergab. Man muß also den Gewinn betrachten, wie eine Summe von Zinsen, und das Procent suchen, dann läßt sich die Vertheilung mit vollkommener Richtigkeit vornehmen. Da nun nach dem Beytritte des dritten das Geschäft noch 16 Monate währte, so lag auch das Capital des dritten nur 16 Monate, oder $\frac{4}{3}$ Jahre. Acht Monate früher hatte der zweyte sein Geld beygeschossen, und dieses ag also am Schlusse des Unternehmens 24 Monate oder 2 Jahre. Ein ganzes Jahr früher hatte der erste die Unternehmung begonnen, und sein Geld lag also am Schlusse 3 Jahre lang. Es lagen also

5700 fl.	3 Jahre
6900 fl.	2 Jarhe
9000 fl.	$\frac{4}{3}$ Jahre

In Bezug auf die Zinsen ist es aber einerley, ob das einfache Capital 3 Jahre, oder das dreyfache Capital 1 Jahr lang liegt. Es ist also in Bezug auf die Zinsen gleichgiltig, ob die oben angesetzten Capitale während der angegebenen Zeiten liegen, oder

17100 fl. 1 Jahr
13800 fl. 1 Jahr
12000 fl. 1 Jahr

Summe = 42900

Es ist also eben so viel, als ob 42900 fl. in einem Jahre die oben angegebene Summe von 20000 fl. eingebracht hätten. Nun sieht man wohl, daß der Gewinn in drey Theile getheilt werden muß, welche sich wie die Zahlen 171, 138, 120 verhalten. Da aber die drey Brüche

$\frac{171}{429}$, $\frac{138}{429}$, $\frac{120}{429}$

sich noch mit 3 verkleinern lassen, so erhält man

$\frac{57}{143}$, $\frac{46}{143}$, $\frac{40}{143}$

Folglich erhält der erste $\frac{57}{143} \times 20000 = 7972$ fl. 2 kr.
der zweyte $\frac{46}{143} \times 20000 = 6433$ fl. 34 kr.
der dritte $\frac{40}{143} \times 20000 = 5594$ fl. 24 kr.

Summe = 20000 fl. — kr.

Es sey noch folgendes Beyspiel gegeben. Vier Personen machen mitsammen ein Unternehmen. Der erste gibt 6000 fl. auf 5 Jahre, der zweyte 9500 fl. auf 4 Jahre, der dritte 7600 fl. auf 3 Jahre, und der vierte 8600 fl. auf $2\frac{1}{2}$ Jahr. Am Ende ist der zu theilende Gewinn 30000 fl. Die Theilnehmer kommen aber überein, dem ersten, weil er Correspondenz u. dgl. führte, als Entschädigung für seine Mühe und seinen Zeitverlurst, ein Procent vom ganzen Gesellschaftscapital zu geben. Nun sind aber

6000 fl. auf 5 Jahre gleich 30000 auf 1 Jahr
9500 „ „ 4 „ „ 38000 „ 1 „
7600 „ „ 3 „ „ 22800 „ 1 „
8600 „ „ $2\frac{1}{2}$ „ „ 21500 „ 1 „

Summe = 112300.

Ein Procent vom ganzen Gesellschaftscapital beträgt folglich 1123 fl. Folglich bleiben zur Vertheilung

30000
1123
28877 fl.

und es wird der Antheil

des ersten $\frac{300}{1123} \times 28877 + 1123 = 8837$ fl. $14\frac{3}{4}$ kr.
des zweyten $\frac{380}{1123} \times 28877 = 9771$ fl. $22\frac{3}{4}$ kr.
des dritten $\frac{228}{1123} \times 28877 = 5862$ fl. $49\frac{3}{4}$ kr.
des vierten $\frac{215}{1123} \times 28877 = 5528$ fl. $32\frac{3}{4}$ kr.

Summe = 30000 fl. — kr.

Es kann auch der besondere Fall eintreten, daß das zusammengeschossene Capital verloren wird, und daß dann einige Theilnehmer einigen andern schuldig werden. Diese Folge ist unvermeidlich, wenn das ganze Capital verloren wird, die einzelnen Capitale aber auf ungleiche Zeiten angelegt sind; denn der Verlurst kann nun nicht anders als im Verhältniß mit dem Producte aus der ersten Einlage in die Zeit berechnet werden. Z. B.

A gibt 3000 fl. auf 5 Jahre . . 15000
B „ 3800 fl. auf 4 Jahre . . 15200
C „ 5000 fl. auf $\frac{1}{2}$ Jahr . . . 2500

Summe des Capitals = 11800 fl. 32700

Dieses ganze Capital soll nun verloren seyn. Sind nun die Theilnehmer übereingekommen, Gewinn oder Verlurst ganz gleichheitlich, und also nach den Regeln der Gesellschaftsrechnung zu vertheilen, so hat

A den Verlurst $\frac{150}{327} \times 11800 = 5412$ fl. 51 kr.
B „ „ $\frac{152}{327} \times 11800 = 5485$ fl. 1 kr.
C „ „ $\frac{25}{327} \times 11800 = 902$ fl. 8 kr.

Summe = 11800 fl. — kr.

Nun kann der Theilnehmer C zu den Theilnehmern A und B sagen: „Gemäß dieser Rechnung verliere ich nur 902 fl. 8 kr., und ich habe also von Euch beyden 4097 fl. 52 kr. zu fordern, und zwar

von A . . . 2412 fl. 51 kr.
und von B . . . 1685 fl. 1 kr.

4097 fl. 52 kr.

Die Vermischungs- oder Alligations-Rechnung.

§. 55. Gegenstände, die sich vermischen lassen, müssen schon für sich in den Haupteigenschaften übereinkommen. Man kann z. B. verschiedene Sorten von Wein, von Tabak, von Mehl, von Weitzen u. dgl. vermischen, auch wohl noch Wein und Wasser, Milch und Wasser, u. s. f., aber man wird nie zwey ganz ungleichartige Gegenstände vermischen, z. B. Bleyschrott und Rübsamen, weil eine solche Vermischung nur aus Muthwillen geschehen könnte, aber für keinen nutzbaren Zweck. Die gewöhnlichen Aufgaben bestehen darin, daß man zwey zum Verkauf bestimmte Sachen, deren Preise einzeln gegeben sind, so vermischt, daß die Mischung um einen gleichfalls zuvor gegebenen Preis abgelassen werden kann.

Es hat z. B. jemand zwey Weinsorten; von der bessern koste die Maaß 3 fl. 12 kr., und von der schlechtern 1 fl. 48 kr. In welchem Verhältnisse müssen diese Sorten gemischt werden, damit die Maaß ohne Nutzen und Schaden um 2 fl. 30 kr. verkauft werden kann? In diesem Beyspiele ist die Auflösung fast von selbst einleuchtend. Gießt man nämlich eine Maaß des bessern und eine Maaß des schlech-

tern Weines zusammen, so macht der Werth dieser zwey Maaß 5 fl. aus. Nimmt man also

$\frac{1}{2}$ Maaß des bessern, zu 1 fl. 36 kr.
$\frac{1}{2}$ Maaß des schlechtern, zu 54 kr.

so kosten diese zwey halben Maaß miteinander 2 fl. 30 kr. Die Aufgabe ist also schon gelöset, man braucht nämlich von jeder der beyden Sorten nur gleichviel zu nehmen, weil man in dem obigen sieht, daß jede die Hälfte der Mischung betragen muß.

Gesetzt aber, es soll die Maaß der Mischung nur 2 fl. kosten, so kann man nicht mehr von beyden Sorten gleichviel nehmen, weil in diesem Fall die Mischung zu theuer wird. Die bessere Sorte ist um 1 fl. 12 kr. oder um $\frac{6}{5}$ fl. theurer als die Mischung, und die schlechtere Sorte ist um 12 kr. oder $\frac{1}{5}$ fl. wohlfeiler. Zugleich ist aber die bessere Sorte um 1 fl. 24 kr. oder $\frac{7}{5}$ fl. theurer als die schlechtere. Schüttet man also 7 Maaß zusammen, und zwar eine Maaß von der bessern, und sechs Maaß von der schlechtern Sorte, so kosten diese

1 Maaß der besseren	. . .	3 fl. 12 kr.
6 Maaß der schlechteren	. .	10 fl. 48 kr.
also die 7 Maaß der Mischung	. .	14 fl. — kr.
und folglich eine Maaß	. . . . . .	2 fl.

Ehe man nun eine Regel auszusprechen sucht, kann man in dem vorliegenden Beyspiel noch leicht bemerken, daß sich, so lange man 7 Maaß zusammenschüttet, immer der Preis der Mischung um 12 kr. oder $\frac{1}{5}$ fl. ändern muß, je nachdem man eine Maaß vom schlechteren weniger, und vom besseren mehr nimmt. Man erhält nämlich folgende Fortschreitung:

Mischung = 7 Maaß.

	Bessere Sorte	Schlechtere Sorte	Preis einer Maaß der Mischung
Maaß	0	7	1 fl. 48 kr.
	1	6	2 fl. — kr.
	2	5	2 fl. 12 kr.
	3	4	2 fl. 24 kr.
	4	3	2 fl. 36 kr.
	5	2	2 fl. 48 kr.
	6	1	3 fl. — kr.
	7	0	3 fl. 12 kr.

Es ergeben sich nun aus dieser Darstellung folgende Proportionen:

1) Der Antheil der bessern Sorte verhält sich zum Antheil der schlechtern verkehrt wie der Unterschied zwischen dem Preise der bessern Sorte und der Mischung zum Unterschied zwischen dem Preise der schlechtern Sorte und der Mischung.

2) Der Antheil der bessern Sorte verhält sich zum Gesammtbetrage der Mischung verkehrt, wie der Unterschied zwischen dem Preise der bessern und der schlechtern Sorte zum Unterschiede zwischen dem Preise der schlechtern Sorte und der Mischung.

3) Der Antheil der schlechtern Sorte verhält sich zum Gesammtbetrage der Mischung verkehrt, wie der Unterschied zwischen dem Preise der bessern und der schlechtern Sorte zum Unterschied zwischen dem Preise der bessern Sorte und der Mischung.

Es sollen z. B. zwey Gegenstände vermischt werden, und das Pfund der besseren Sorte 12 fl. 36 kr. kosten, von der schlechteren aber 5 fl. 24 kr. Von der Mischung soll das Pfund um 10 fl. abgehen. Nun erhält man hier:

Unterschied im Preise
der besseren und schlechteren Sorte = 7 fl. 12 kr. = 7,2 fl.

der besseren Sorte und der Mischung = 2 fl. 36 kr. = 2,6 fl.
der schlechteren Sorte u. der Misch. = 4 fl. 36 kr. = 4,6 fl.

Man erhält nun nach der ersten Regel

$$(\text{Antheil d. besseren Sorte}) : (\text{A. d. schlechteren}) = \frac{1}{2,6} : \frac{1}{4,6} = 46 : 26 = 23 : 13$$

In ganzen Pfunden kann man also die Mischung nicht geringer als 36 Pf. machen. Dann hat man von der besseren Sorte 23 Pf., und von der schlechteren 13 Pf. zu nehmen. Man hat nun ferner für den Antheil der besseren Sorte:

℔ ℔
$$1 : 23 = 12,6 : x$$
also
$$x = 23 \times 12,6 = 289,8 \text{ fl.}$$

Für die schlechtere Sorte:

℔ ℔
$$1 : 13 = 5,4 : y$$
also
$$y = 13 \times 5,4 = 70,2 \text{ fl.}$$

Die Mischung von 36 Pf. kostet also 360 fl.
und mithin kostet 1 Pf. 10 fl.

Betrachtet man die Mischung als 1, so erscheinen die Antheile der beyden Sorten als Brüche, deren Nenner angiebt, wie viele Pfunde oder Maaß die Mischung aufs wenigste betragen muß, um keine Bruchtheile zu erhalten. Gemäß diesem erhält man nach der zweyten Regel

$$(\text{Antheil der besseren Sorte}) : 1 = \frac{1}{7,2} : \frac{1}{4,6} = 46 : 72 = 23 : 36$$

Also ist

der Antheil von der besseren Sorte = $\frac{23}{36}$ von der Mischung.

Nach der dritten Regel erhält man:

$$\text{(Antheil der schlechteren Sorte)}: 1 = \frac{1}{7,2} : \frac{1}{2,6}$$
$$= 26 : 72$$
$$= 13 : 36$$

und also ist

der Antheil der schlechteren Sorte $= \frac{13}{36}$ von der Mischung.

Man sieht auch hier, daß die Mischung nicht weniger als 36 ganze Pfunde betragen darf, wenn man die Antheile der beyden Sorten gleichfalls in ganzen Pfunden finden will.

Es sey noch folgendes Beyspiel gegeben. Von irgend einer Sorte Wein kann die Maaß nicht anders als um 3 fl. 12 kr. gegeben werden. Wie viel müßte man Wasser zugiessen, um die Maaß des verfälschten Weines um 2 fl. 42 kr. geben zu können? Hier kostet die schlechtere Sorte nichts. Es ist also der Unterschied im Preise

der besseren und schlechteren Sorte $= 3,2$ fl.
der bessern Sorte und der Mischung $= 0,5$ fl.
der schlechtern Sorte und der Mischung $= 2,7$ fl.

Man hat folglich unter 27 Maaß Wein 5 Maaß Wasser zu schütten, und kleiner als 32 Maaß läßt sich in ganzen Maaßen die Mischung nicht machen. Dann ist

Preis des Weines $= 27 \times 3,2 = 86,4$ fl.

32 Maaß des verfälschten Weines kosten also 86 fl. 24 kr. Es ist daher der Preis von einer Maaß

$$\frac{86,4}{32} = 2,7 \text{ fl.} = 2 \text{ fl. } 42 \text{ kr.}$$

§. 56. Wenn mehr als zwey Gegenstände miteinander vermischt werden sollen, dann ist die Aufgabe unbestimmt, und hängt zum Theil von der Willkür ab. Gesetzt, es sollen drey Sorten Wein vermischt werden. Die Maaß koste

vom ersten 3 fl. 36 kr. $= 3,6$ fl.
vom zweyten 2 fl. 42 kr. $= 2,7$ fl.
vom dritten 1 fl. 54 kr. $= 1,9$ fl.

und die Maaß der Mischung soll 3 fl. kosten.

Es ist also der Unterschied im Preise

der ersten und der Mischung	=	0,6 fl.
der zweyten und der Mischung	=	0,3 fl.
der dritten und der Mischung	=	1,1 fl.

und der Unterschied im Preise

der ersten und zweyten	=	0,9 fl.
der ersten und dritten	=	1,7 fl.
der zweyten und dritten	=	0,8 fl.

Will man den ersten und zweyten allein vermischen, so muß man eine Mischung von 3 Maaß machen, nämlich: 1 Maaß des ersten und 2 Maaß des zweyten zusammenschütten. Dann hat man

1 Maaß des ersten kostet . .	3,6 fl.
2 Maaß des zweyten kosten . .	5,4 fl.
	9,0 fl.

Die 3 Maaß der Mischung kosten also 9 fl., folglich 1 Maaß 3 fl., wie verlangt ist. Mischt man nun den ersten und dritten zusammen, so muß man 17 Maaß zusammenschütten, nämlich 11 Maaß vom ersten, und 6 Maaß vom dritten. Dann hat man:

11 Maaß des ersten kosten . . .	39,6 fl.
6 Maaß des dritten	11,4 fl.
17 Maaß dieser Mischung kosten also	51 fl.
und folglich kostet 1 Maaß	3 fl.

Schüttet man nun beyde Mischungen zusammen, so hat man 20 Maaß, und diese kosten 60 fl., also immer eine Maaß 3 fl. Diese 20 Maaß enthalten nun

von der ersten Sorte . . .	12 Maaß
von der zweyten	2 =
von der dritten	6 =
	20

Die Aufgabe ist nun zwar gelöset, und man kann sagen, daß die kleinste Mischung 10 Maaß beträgt, nämlich

von der ersten Sorte	. .	6 Maaß	. . .	21,6 fl.	
von der zweyten	. . . .	1	" . . .	2,7	"
von der dritten	. . . .	3	" . . .	5,7	"
		10 Maaß		30 fl.	

Allein diese Auflösung ist nicht die einzige mögliche. Da nämlich hier die zweyte Sorte nur von einem sehr geringen Einfluß ist, so kann man etwa verlangen, daß von der zweyten dreymal so viel genommen werde, als von der dritten. Schüttet man also 3 Maaß des zweyten Weines und eine Maaß des dritten zusammen, so hat man 4 Maaß, welche zusammen 10 fl. kosten. Von dieser Mischung kostet also jede Maaß 2,5 fl. Nun ist es aber eben so viel, als hätte man nur zwey Sorten zu mischen, wobey jede Maaß

der ersten . . . . . 3,6 fl.

und der zweyten . . . . . 2,5 fl. kostet

und nun erhält man

$$(\text{Antheil der ersten}) : (\text{Antheil der zweyten}) = \frac{1}{0,6} : \frac{1}{0,5}$$
$$= 5 : 6$$

Die kleinste Mischung besteht also aus 11 Maaß, und dazu braucht man

5 Maaß der ersten Sorte

6 Maaß der Mischung aus der zweyten und dritten Sorte.

Macht man daher eine Mischung von 22 Maaß, so befinden sich dabey

10	Maaß der ersten Sorte	. . . . .	36 fl.
9	" der zweyten	. . . .	24,3
3	" der dritten	. . . .	5,7
22	Maaß der Mischung kosten		66 fl.

Folglich kostet 1 Maaß . . . . 3 fl.; wie verlangt ist. Man sieht aber wohl, daß solche Auflösungen unendlich viele möglich sind.

Von den Mittelzahlen oder Durchschnittszahlen.

§. 57. Wenn man irgend eine Menge von gegebenen Zahlen addirt, und dann die Summe durch die Anzahl der gegebenen Zahlen dividirt, so nennt man den Quotienten das arithmetische Mittel, oder die Durchschnittszahl. Wenn z. B. die Zahlen gegeben sind

$$\begin{array}{r} 5 \\ 7 \\ 11 \\ 17 \\ \hline \end{array}$$

so ist ihre Summe = 40

Da nun vier Zahlen gegeben sind, so ist die Durchschnittszahl

$$\frac{40}{4} = 10.$$

Die Herstellung einer Mittelzahl unterliegt also durchaus gar keiner Schwierigkeit. Diese Mittelzahlen sind aber wichtig, wegen ihres häufigen Gebrauches, indem sie bey den meisten Voranschlägen und Uebersichten der wesentlichste und oft einzige Anhaltspunkt sind. Ihren Gebrauch kann man aus folgendem Beyspiele sehen.

Wenn man z. B. von einem Getreidemarkt die Nachricht erhält, daß der Schäffel Weitzen nicht theurer als 18 fl. 20 kr. und nicht wohlfeiler als 15 fl. 48 kr. verkauft wurde, so sagt man, es habe im Mittel der Schäffel

$$\begin{array}{l} 18 \text{ fl. } 20 \text{ kr.} \\ 15 \text{ ″ } 48 \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{34 \text{ fl. } 8}{2} = 17 \text{ fl. } 4 \text{ kr.}$$

gekostet. Dieses hier gefundene Mittel von 17 fl. 4 kr. ist aber nicht das eigentliche. Um dieses letztere zu finden, müßte man alle einzelnen Verkaufspreise wissen, und zu glei=

gleicher Zeit, wie viele Schäffel von jedem Preise abgesetzt wurden. Gesetzt also, es haben folgende Verkäufe statt gefunden:

786 Schäffel zu	18 fl. 20 kr.	. . .	14410 fl.	— kr.
947 " "	17 " 38 "	. . .	16698 "	46 "
529 " "	17 " 50 "	. . .	9433 "	50 "
683 " "	16 " 48 "	. . .	11474 "	24 "
98 " "	15 " 48 "	. . .	1548 "	24 "
3043 Schäffel kosteten		. . . .	53565 fl.	24 kr.

Es kostete folglich im Durchschnitte ein Schäffel

$$\frac{53565,4}{3043} = 17,6 \text{ fl.} = 17 \text{ fl. } 36 \text{ kr.}$$

Dieses eigentliche Mittel kann man sich nur aus Mangel aller nöthigen Angaben nicht immer verschaffen.

Aus diesen Mittelzahlen lassen sich nun mehrere Schlüsse ziehen; nämlich:

1) Weichen die einzelnen Preise sehr stark vom Mittelpreise ab, so kann man annehmen, daß die Zufuhr zum Markte sehr reichlich gewesen sey, daß Ueberfluß auf dem Markte geherrscht habe, weil offenbar die Käufer den Unterschied in der Güte des Getreides sehr hoch in Anschlag brachten. Man kann dann auch wohl annehmen, daß vieles unverkauft stehen geblieben sey.

2) Weichen aber die einzelnen Verkaufspreise vom Mittelpreise nur wenig ab, und ist der Mittelpreis zugleich selbst schon groß, so läßt sich schließen, daß der Begehr auf dem Markte größer war als die Zufuhr. Die Käufer konnten sich daher nicht heickel zeigen, und den Unterschied in der Qualität nicht wie sonst in Rechnung bringen.

3) Der Besitzer von großen Vorräthen wird also nach den oben gefundenen Umständen seine Entschlüsse fassen, um entweder zu verkaufen, oder noch länger zu warten.

Das hier behandelte Beyspiel dient, um sich von den

Durchschnittszahlen einen deutlichen Begriff zu machen. Es enthält aber nicht die einzige Art ihrer Anwendung und ihres Gebrauches. Diese sind vielmehr unendlich mannigfaltig, und es kommen dadurch Gegenstände zu einer Berechnung, die an und für sich nichts zu rechnen darbieten. Es kann z. B. bey einer Krankheit und den gegen sie angewendeten Heilmitteln von keiner Rechnung die Rede seyn; wenn man aber findet, daß z. B. von 1000 Menschen, die von der nämlichen Krankheit befallen wurden, 945 gestorben, und nur 55 genesen sind, so kann man sich für überzeugt halten, daß man diese Krankheit nicht zu heilen weiß. Eben so sagt man z. B. in dieser oder jener Stadt von 300000 Einwohnern sterben im Durchschnitte täglich 15 Menschen. Diese Zahl ergiebt sich, wenn man die Anzahl der Todesfälle von vielen Jahren, z. B. von 20 Jahren, mit der Anzahl der Tage dividirt. Zeigt sich nun etwa eine Zeit lang eine Sterblichkeit von 25 Menschen täglich, und weiß man zugleich, daß die Bevölkerung der Stadt sich nicht beträchtlich vermehrt hat, so kann man mit Sicherheit schließen, daß besondere Krankheiten oder sonstige allgemeine Unglücksfälle die Stadt heimgesucht haben.

Anhang.

Von der Quadrat- und Cubik-Wurzel.

§. 58. Wenn man eine Zahl mit sich selbst multiplicirt, so nennt man das Produkt das Quadrat jener Zahl z. B.

$$6 \times 6 = 36$$

Es ist also 36 das Quadrat von 6. Eben so ist 81 das Quadrat von 9, und 121 das Quadrat von 11. Die Herstellung des Quadrates unterliegt daher keiner Schwierigkeit; denn wenn z. B. das Quadrat von 7837 verlangt ist, so hat man nur folgende Multiplication:

$$
\begin{array}{r}
7837 \\
7837 \\
\hline
54859 \\
23511 \\
62696 \\
54859 \\
\hline
61418569
\end{array}
$$

Von 7837 ist also das Quadrat 61418569. Wenn aber nur diese letzte Zahl allein gegeben ist, und gesagt wird, sie sey ein Quadrat, so entsteht die Frage: Von welcher Zahl ist sie das Quadrat? Man sagt dann: Welche Quadratwurzel hat die gegebene Zahl? Es kömmt also darauf an, die gegebene Zahl in zwey gleiche Factoren zu zerlegen. Diese Zerlegung kann sich aber nur auf die Art gründen, nach welcher durch wirkliche Multiplication das Quadrat hergestellt wird.

Von den ersten neun Zahlen weis man die Quadrate ohnehin, und sie sind:

Zahlen:	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
Quadrate:	1.	4.	9.	16.	25.	36.	49.	64.	81.

Man sieht aus dieser Tafel, daß die Quadrate der ersten neun Zahlen nur höchstens mit zwey Ziffern geschrieben werden. Das Quadrat von 10 ist die erste Zahl, welche mit drey Ziffern geschrieben wird, nämlich 100. Das Quadrat von 100 ist aber 10000. Das Quadrat von 99 ist kleiner als 10000, und kann also nur mit vier Ziffern geschrieben werden. Es werden also die Quadrate aller Zahlen von 10 bis 99 höchstens mit vier Ziffern geschrieben. Auf ähnliche Art überzeugt man sich, daß die Quadrate aller Zahlen von 100 bis 999 höchstens mit sechs Ziffern geschrieben werden. Wenn also überhaupt eine Zahl gegeben ist, welche aus einer beliebigen Menge Ziffer besteht, so kann ihr Quadrat höchstens nochmal so viele Ziffer enthalten; und

wenn umgekehrt eine Zahl gegeben ist, die etwa mit fünf Ziffern geschrieben ist, so kann ihre Quadratwurzel nur drey Ziffer enthalten.

Nun sey zuerst das Quadrat irgend einer zweyziffrigen Zahl, etwa 76, verlangt. Durch gewöhnliche Multiplication erhält man

$$\begin{array}{r} 76 \\ 76 \\ \hline 456 \\ 532 \\ \hline 5776 \end{array}$$

Es ist aber auch noch 76 so viel als 70 und 6. Erinnert man sich nun an die Multiplication mit benannten Zahlen, oder an die Multiplication von ganzen Zahlen und Brüchen mit ganzen Zahlen und Brüchen, so ergiebt sich: Um das Quadrat von 76 zu finden, muß man 70 und 6 mit 70 und 6 multipliciren. Man muß also sowohl 70 als 6 zuerst mit 70 und dann mit 6 multipliciren. Es ist aber

$$\begin{array}{rcr} 70 \times 70 & = & 4900 \\ 70 \times 6 & = & 420 \\ 6 \times 70 & = & 420 \\ 6 \times 6 & = & 36 \\ \hline & & 5776 \end{array}$$

Es kömmt also hier vor: 1) Das Quadrat von 70, 2) das Quadrat von 6, und 3) zweymal das Product aus 70 und 6. Zählt man daher die Ziffer von der rechten Hand gegen die linke, so fängt das Quadrat der Einer schon in der ersten Zifferstelle an, das Quadrat der Zehner aber erst in der dritten, so daß die Quadrate der einzelnen Ziffer der Zahl 76 bloß neben einander stehen, nämlich

4936

Zieht man diese Zahl von dem ganzen Quadrate ab, so bleibt

$$\begin{array}{r} 5776 \\ 4936 \\ \hline 840 = 2 \times 70 \times 6 \end{array}$$

Das doppelte Product aus den Einern in die Zehner beginnt also in der zweiten Zifferstelle. Auf gleiche Art wird das Quadrat von 89

$$\begin{array}{r} 6481 \\ 144 \\ \hline 7921 \end{array}$$

Nun nehme man noch eine dreyziffrige Zahl, etwa 758. Es ist aber 758 so viel als 700 und 50 und 8. Um also das Quadrat zu erhalten, muß jede dieser drey Zahlen mit jeder dieser drey multiplicirt werden. Dieses giebt

$$\begin{array}{rcrcr} 700 & \times & 700 & = & 490000 \\ 50 & \times & 700 & = & 35000 \\ 8 & \times & 700 & = & 5600 \\ 700 & \times & 50 & = & 35000 \\ 50 & \times & 50 & = & 2500 \\ 8 & \times & 50 & = & 400 \\ 700 & \times & 8 & = & 5600 \\ 50 & \times & 8 & = & 400 \\ 8 & \times & 8 & = & 64 \\ \hline & & & & 574564 \end{array}$$

Betrachtet man aber diese einzelnen Producte, so lassen sie sich auf folgende Weise zusammenstellen:

$$\begin{array}{rcrcr} 700 & \times & 700 & = & 490000 \\ 50 & \times & 50 & = & 2500 \\ 8 & \times & 8 & = & 64 \\ 2 \times 700 & \times & 50 & = & 70000 \\ 2 \times 750 & \times & 8 & = & 12000 \\ \hline & & & & 574564 \end{array}$$

Auch hier stehen die Quadrate der einzelnen Ziffer bloß ne-

beneinander. Das Product 2 × 75 × 8 beginnt an der zweyten Zifferstelle, weil man eigentlich 2 × 750 × 8 hat. Das Product 2 × 7 × 5 beginnt an der dritten, weil man 2 × 700 × 50 herzustellen hat. Die Herstellung des Quadrates besteht also in der Herstellung der Producte und Quadrate der einzelnen Ziffer, und im richtigen Ansetzen an ihren Platz.

Es sey noch das Quadrat von 89647 verlangt, so wird die Operation:

89640 × 7	=	627480
89600 × 40	=	3584000
89000 × 600	=	53400000
80000 × 9000	=	720000000
		777611480
		2
		1555222960
Quadrate der einzelnen Ziffer	=	6481361649
		8036584609

Eben so erhält man das Quadrat von 9754063 durch folgende Operation:

9754060 × 3	=	29262180
9754000 × 60	=	585240000
9750000 × 4000	=	39000000000
9700000 × 50000	=	485000000000
9000000 × 700000	=	6300000000000
		6824614502180
		2
		13649229004360
Quadrate der einzelnen Ziffer	=	81492516003609
		95141745007969

Diese Art, die Quadrate herzustellen, ist nicht bloß be-

quemer, als die gemeine Multiplication, sondern sie führt auch zu dem Verfahren, die Wurzel zu finden, wenn das Quadrat gegeben ist.

§. 59. Das Quadrat ist ein Product aus zwey gleichen Factoren. Wäre also einer dieser Factoren bekannt, so könnte man mit ihm dividiren, und dann würde der Quotient dem Divisor gleich. Wenn aber eine Quadratwurzel verlangt wird, so ist nur das Dividend allein bekannt, und man muß daher den Divisor und den Quotienten zugleich zifferweise zu erhalten suchen. Da man aber nun das Verfahren kennt, wie ein Quadrat hergestellt wird und zusammengesetzt ist, so kann man jenes Verfahren umkehren, und so auf folgende Weise die Wurzel finden. Es sey die Quadratwurzel von

8056139536

verlangt. Da in jedem Quadrate die Quadrate aller einzelnen Ziffer der Wurzel nur zwey Ziffer einnehmen, und bloß nebeneinander geschrieben sind, so theile man vor allem die gegebene Zahl von der Rechten gegen die Linke in Classen von zwey Ziffern ab. Dieses giebt

80|56|13|95|36

und man weiß nun, daß die gesuchte Wurzel aus fünf Ziffern bestehen muß. Sie befindet sich also zwischen 10000 und 99999. In der höchsten Classe, nämlich 80, muß das Quadrat der höchsten Ziffer der Wurzel enthalten seyn. Diese Ziffer ist also eine der ersten neun Zahlen, und zwar diejenige, deren Quadrat nur nicht größer ist als 80. Diese erste Ziffer ist also 8, denn das Quadrat von 8, nämlich 64 ist noch kleiner als 80. Weil aber schon bekannt ist, daß die Wurzel fünf Zifferstellen einnimmt, so ist sie nicht kleiner als 80000, und das Quadrat von 80000 muß daher in der oben gegebenen Zahl enthalten seyn. Zieht man also dieses Quadrat, nämlich

6400000000

von der gegeben Zahl ab, so bleibt

1656139536

Wenn aber das Quadrat auf die Weise entstanden ist, welche im vorigen Paragraph gezeigt wurde, so muß es das doppelte Product aus 80000 in die nächstfolgende Ziffer der Wurzel, mit 1000 multiplicirt enthalten. Dividirt man also den oben stehenden Rest mit

2 × 80000 × 1000

oder

160000000

so muß der Quotient die zweyte Ziffer der Wurzel seyn. Dieser giebt

1656139536	9
160000000	
1440000000	
216139536	

Die zweyte Ziffer der Wurzel ist also 9, und da die ganze Wurzel fünf Ziffer einnimmt, so muß nun zu dem vorhin erhaltenen

80000

noch addirt werden 9000

89000

Gemäß der Entstehung muß aber auch das Quadrat von 9000, also 81000000 in der gegebenen Zahl vorkommen. Zieht man dieses ab, so erhält man

216139536
81000000

135139536

Dieser Rest muß das doppelte Product aus dem bereits erhaltenen 89000 in die dritte Ziffer der Wurzel mit 100 multiplicirt, enthalten. Dividirt man also mit

$$2 \times 89000 \times 100$$

oder

$$17800000$$

so wird

135139536	7
17800000	
124600000	
10539536	

Die dritte Ziffer der Wurzel ist folglich 7, und da die ganze Wurzel fünf Ziffer einnimmt, so hat man 700 zu den bereits erhaltenen 89000 zu addiren. Man hat also in diesem Augenblicke 89700 als bekannten Theil der Wurzel. Gemäß der erklärten Entstehung muß aber der obige Rest auch noch das Quadrat von 700, oder 490000, enthalten. Subtrahirt man auch dieses, so erhält man

$$\begin{array}{r} 10539536 \\ 490000 \\ \hline 10049536 \end{array}$$

Dieser Rest muß das doppelte Product aus 89700 in die vierte Ziffer der Wurzel mit 10 multiplicirt, enthalten. Dividirt man also mit

$$2 \times 89700 \times 10$$

oder

$$1794000$$

so erhält man die vierte Ziffer der Wurzel, nämlich

10049536	5
1794000	
8970000	
1079536	

Man hat jetzt 50 zu den bereits erhaltenen 89700 zu addiren, man kennt also jetzt 89750 als Theil der Wurzel. Von dem oben stehenden Reste muß aber nun noch das Quadrat von 50, oder 2500 abgezogen werden, nämlich

$$\begin{array}{r} 1079536 \\ 2500 \\ \hline 1077036 \end{array}$$

Dieser Rest enthält das doppelte Product aus 89750 in die letzte, noch unbekannte Ziffer der Wurzel. Dividirt man daher mit

$$2 \times 89750$$

oder

$$\overline{179500}$$

so wird

$$\begin{array}{r|l} 1077036 & 6 \\ 179500 & \\ \hline 1077000 & \\ \hline 36 & \end{array}$$

Es ist also 6 die letzte Ziffer der Wurzel, und ihr Quadrat, nämlich 36 ist der einzige Rest. Zieht man also dieses Quadrat noch ab, so hebt sich alles auf, und die gesuchte Wurzel ist

89756.

Bildet man von dieser Zahl nach dem vorigen Paragraph das Quadrat, so erhält man

$$\begin{array}{rcrcr} 80000 & \times & 9000 & = & 720000000 \\ 89000 & \times & 700 & = & 62300000 \\ 89700 & \times & 50 & = & 4485000 \\ 89750 & \times & 6 & = & 538500 \\ \hline &&&& 787323500 \\ &&&& 2 \\ \hline &&&& 1574647000 \\ &&&& 6481492536 \\ \hline &&&& 8056139536 \end{array}$$

§. 60. Nun ist leicht zu sehen, daß sich die ganze Rechnung, die im vorigen Paragraph vorkömmt, auf folgende Regeln zurückführen läßt.

1) Man theilt die gegebene Zahl von der Rechten gegen die Linke in Classen von zwey Ziffern ab, wobey die letzte

Classe zur Linken auch aus einer Ziffer bestehen kann. Die Wurzel enthält dann so viele Ziffer, als man Classen erhalten hat.

2) Die erste Ziffer der Wurzel ist eine der ersten neun Zahlen, deren Quadrat wenigstens nicht größer ist, als die ganze erste Classe. Dieses Quadrat wird abgezogen, und zum Reste setzt man die nächstfolgende Classe hinzu.

3) Der Divisor, der nun nöthig ist, ist immer das doppelte von allem dem, was man bereits von der Wurzel kennt, und er wird so unter sein Dividend geschrieben, daß an der rechten Seite eine Zifferstelle leer bleibt.

4) Nun bestimmt man den Quotienten auf gewöhnliche Weise, und schreibt die Ziffer, die man als Quotienten erhält, auch sogleich an die leer gelassene Stelle neben dem Divisor.

5) Man multiplicirt nun und subtrahirt, wie bey einer gewöhnlichen Division. Zum Reste wird wieder die nächste Classe geschrieben, und dann werden die Regeln von der dritten an immer fort befolgt, bis alle Ziffern der gegebenen Zahl verbraucht sind.

Nach diesen Regeln wird die Rechnung für das Beyspiel im vorigen Paragraphe folgende:

```
80|56|13|95|36 | 89756
64
----
1656
169
1521
------
13513
1787
12509
-------
100495
17945
89725
--------
1077036
179506
1077036
--------
0
```

2tes Beyspiel.

```
95|14|17|45|00|79|69 | 9754063
81
----
 1414
 187
 1309
 ----
 10517
 1945
 9725
 -----
  79245
  19504
  78016
  -----
  122900
  19508
  --------
  12290079
   1950806
  11704836
  ---------
   58524369
   19508123
   58524369
   --------
       0
```

Zu der bisher geführten Entwicklung, und zu den darauf gegründeten Regeln ist nur noch folgendes hinzuzufügen.

1) Die Erhaltung der Wurzel setzt voraus, daß die gegebene Zahl wirklich ein Quadrat, und also ein Product aus zwey gleichen Factoren sey. Von dieser Beschaffenheit ist aber nicht jede Zahl. Die Forderung aber, irgend eine Zahl, die kein Quadrat ist, als ein Quadrat ansehen zu müssen, kann in den Bedingungen der Aufgabe begründet seyn, und die Angabe der Wurzel daher nothwendig werden. Man muß daher die Rechnung gerade so anstellen, als ob die gegebene Zahl ein Quadrat wäre. Da aber dann die Rechnung nicht aufgeht, so muß man annehmen: die gegebene Zahl sey von unendlich vielen Decimalstellen begleitet, welche bloß deswegen nicht angeschrieben wurden, weil sie *alle* Null sind. So ist z. B.

239 und 239,000000 . . .

ganz und gar das nämliche; wenn aber die Quadratwurzel verlangt wird, so kann man nun die Rechnung nach Belieben oder nach Bedürfniß fortsetzen, bis nur mehr so kleine Bruchtheile vernachläßigt werden, daß sie für nichts geachtet werden können. Auf diese Art erhält man

```
2|39 | 15,4596 . . . . .
1
———
139
 25
125
————
 1400
  304
 1216
 —————
  18400
   3085
  15425
  ——————
   297500
    30909
   278181
   ———————
    1931900
     309186
    1855116
    ————————
      76784
```

Solche Zahlen, welche als Quadrate angesehen werden müssen, ohne es wirklich zu seyn, liefern bloß solche Wurzeln, welche aus einer ganzen Zahl, und einem nicht periodischen Decimalbruch bestehen. Solche Wurzeln nennt man irrationale.

2) Wenn aus einer Zahl, welche aus Ganzen und Decimalen, oder bloß aus Decimalen besteht, die Quadratwurzel verlangt wird, so muß die Eintheilung in Classen jedesmal von dem Comma ausgehen, welches die Ganzen von den Brüchen absondert. Man kann hier immer annehmen, die Decimalen seyen zwar in beliebiger Menge vorhanden, aber nicht angeschrieben, indem die nicht angeschriebenen

sämmtlich Null sind. Man kann also immer annehmen, daß sie in gerader Anzahl vorhanden sind, und daher auch so viele Classen bilden, als man Decimalziffer in der Wurzel erhalten will. So ist z. B.

39,765 und 39,76500000

ganz einerley, wenn aber die Quadratwurzel mit vier Decimalen verlangt wird, so hat man sich des letzteren Ausdrucks zu bedienen. Dadurch erhält man

39,|76|50|00|00 | 6,3059
36
———
376
123
369
———
75000
12605
63025
———
1197500
126109
1134981
———
62519

3) Wenn aus einem gemeinen Bruch die Quadratwurzel verlangt ist, so muß man sie entweder aus dem Zähler und aus dem Nenner ziehen, oder den Bruch zuerst in einen Decimalbruch verwandeln, und die Wurzel dann aus diesem ziehen.

§. 61. Ein Product aus drey gleichen Factoren nennt man den Cubus der nämlichen Zahl, die man zum Multipliciren verwendet hat. So ist z. B. 64 der Cubus von 4, denn es ist

$$64 = 4 \times 4 \times 4$$

Man erhält also auch den Cubus, wenn man das Quadrat nochmal mit der Wurzel multiplicirt. Es sey z. B. der Cubus von

7546

verlangt, so ist dieses

$$7546 \times 7546 \times 7546$$

oder

$$56942116 \times 7546$$

Die Cubus der ersten neun Zahlen sind in folgender Tabelle:

Zahlen:	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
Cubus:	1.	8.	27.	64.	125.	216.	343.	512.	729.

Aus dieser Tabelle sieht man zugleich, daß die Cubus der ersten neun Zahlen nicht mehr als drey Ziffer einnehmen können. Der Cubus von 10 ist 1000, und diese ist die erste und kleinste Zahl, welche mit vier Ziffern geschrieben wird. Es kann also der Cubus einer zweyziffrigen Zahl nicht mehr als sechs Ziffer einnehmen, und dabey sind die Cubus der einzelnen zwey Ziffer nur nebeneinander geschrieben. Eine gleiche Eigenschaft besitzen auch die Cuben aller mehrziffrigen Zahlen. Um aber nun, wie beym Quadrat, die Zusammensetzung eines Cubus genau und umständlich zu erfahren, soll z. B. der Cubus von 87 gesucht werden. Zuerst erhält man

$$87 \times 87 \times 87$$

und also giebt die gewöhnliche Multiplication

$$\begin{array}{r} 87 \\ 87 \\ \hline 609 \\ 696 \\ \hline 7569 \\ 87 \\ \hline 52983 \\ 60552 \\ \hline 658503 \end{array}$$

Da aber 87 so viel ist, als 80 und 7, und der Cubus er=

halten wird, wenn man das Quadrat nochmal mit der Wurzel multiplicirt, so erhält man zuerst für das Quadrat

$$80 \times 80 = 6400$$
$$7 \times 7 = 49$$
$$2 \times 80 \times 7 = 1120$$
$$\overline{7569}$$

Nun muß jede dieser drey Zahlen noch sowohl mit 80 als mit 7 multiplicirt werden. Dadurch erhält man

80 mal 80 mal 80	=	6400 mal 80	=	512000
7 mal 7 mal 80	=	49 mal 80	=	3920
2 mal 80 mal 7 mal 80	=	1120 mal 80	=	89600
80 mal 80 mal 7	=	6400 mal 7	=	44800
7 mal 7 mal 7	=	49 mal 7	=	343
2 mal 80 mal 7 mal 7	=	1120 mal 7	=	7840
				658503

oder

80 mal 80 mal 80	=	512000
7 mal 7 mal 7	=	343
3 mal 80 mal 80 mal 7	=	134400
3 mal 80 mal 7 mal 7	=	11760
		658503.

Nun kennt man die Zusammensetzung des Cubus hinlänglich, um den von jeder beliebigen Zahl herstellen zu können. Es kommen nämlich dreyerley Zahlen vor:

1) Die Cubus aller einzelnen Ziffer. Diese sind bloß nebeneinander geschrieben.

2) Indem man die gegebene Zahl in so viele kleinere auflöset, als sie Ziffer hat, welche also Einer, Zehner, Hunderter, Tausender, u. s. w. sind, wird das Quadrat jeder solchen Zahl mit allen vorausgehenden und nachfolgenden multiplicirt, und die Summe dieser Producte dreyfach genommen.

3) Dabey kann man die vorausgehenden Zahlen zusammennehmen, um ihr Quadrat mit einer nachfolgenden, oder ihre bloße Summe mit dem Quadrat einer nachfolgenden zu multipliciren.

Es sey z. B. der Cubus von 789 verlangt, so erhält man

700 mal 700 mal 80 =	39200000
700 mal 80 mal 80 =	4480000
780 mal 780 mal 9 =	5475600
780 mal 9 mal 9 =	63180
	49218780
	3
	147656340
Summe der Cuben	343512729
	491169069 Cubus von 789.

2tes Beyspiel. Cubus von 7896.

7000 mal 7000 mal 800 =	39200000000
7000 mal 800 mal 800 =	4480000000
7800 mal 7800 mal 90 =	5475600000
7800 mal 90 mal 90 =	63180000
7890 mal 7890 mal 6 =	373512600
7890 mal 6 mal 6 =	284040
	49592576640
	3
	148777729920
Summe der Cuben	343512729216
	492290459136 = Cubus von 7896.

§. 62. Wenn nun die Cubikwurzel verlangt wird, so heißt dieses so viel, als man soll die gegebene Zahl in drey

gleiche Factoren zerlegen, und die Größe dieser Factoren angeben. Dieses läßt sich wieder auf keine andere Weise bewerkstelligen, als daß man das Verfahren, das im vorigen Paragraph dargestellt ist, umkehrt, und dadurch eine Ziffer nach der andern zu erhalten sucht.

Da die Cubus der einzelnen Ziffer nur neben einander geschrieben sind, und jeder von ihnen drey Zifferstellen einnimmt, so muß man damit beginnen, daß man die gegebene Zahl von der Rechten gegen die Linke in Classen von drey Ziffern abtheilt, wobey die letzte Classe zur Linken auch aus einer, oder zwey, oder drey Ziffern bestehen kann. Die gesuchte Wurzel muß nun so viele Ziffern haben, als man Classen erhalten hat, und die erste Ziffer der Wurzel ist eine der ersten neun Zahlen, deren Cubus wenigstens nicht größer ist, als die ganze erste Classe. Es sey folgende Zahl gegeben

505956733885504.

Theilt man diese in Classen ab, so erhält man

505|956|733|885|504.

Die gesuchte Wurzel besteht folglich aus fünf Ziffern, wovon die erste 7 ist, denn der Cubus von 7, nämlich 343 ist noch kleiner als die Classe 505. Da aber die gesuchte Wurzel fünf Ziffer einnimmt, so ist sie größer als

70000.

Subtrahirt man den Cubus von 7, nämlich 343, von der ersten Classe, so ist die übrig bleibende Zahl

162956733885504

Gemäß der Entstehung eines Cubus muß nun diese Zahl das dreyfache Product aus dem Quadrate von 70000 in die nächste Ziffer der Wurzel, multiplicirt mit 1000 enthalten. Wenn man also mit

$$3 \times 70000 \times 70000 \times 1000$$

oder mit

14700000000000

dividirt, so ist der Quotient die nächste Ziffer der Wurzel, nämlich

16295673388 5504	9
14700000000000	
132300000000000	
3065673388 5504	

Diese Ziffer 9 ist nun mit 1000 zu multipliciren, und man hat also 9000 zu 70000 zu addiren. Man weis folglich jetzt, daß die Wurzel größer ist als 79000. Der oben stehen gebliebene Rest muß aber noch enthalten

$$3 \times 70000 \times 9000 \times 9000 = 17010000000000$$
$$9000 \times 9000 \times 9000 = 729000000000$$
$$17739000000000$$

Diese Zahl muß folglich abgezogen werden, und man erhält

3065673388 5504
17739000000000
1291773388 5504

In diesem Reste muß enthalten seyn das dreyfache Product aus dem Quadrate von 70000 in die nächste Ziffer der Wurzel mit 100 multiplicirt. Dividirt man also mit

$$3 \times 79000 \times 79000 \times 100$$

oder mit

1872300000000

so wird der Quotient die nächste Ziffer der Wurzel; nämlich

1291773388 5504	6
1872300000000	
11233800000000	
168393388 5504	

Man weis nun in diesem Augenblicke, daß die gesuchte Wurzel größer ist als

79600

Der obige Rest muß aber noch enthalten

$$3 \times 79000 \times 600 \times 600 = 85320000000$$
$$600 \times 600 \times 600 = 216000000$$
$$85536000000$$

Zieht man diese Zahl ab, so bleibt

$$\begin{array}{r} 168393388550 4 \\ 85536000000 \\ \hline 159839788550 4 \end{array}$$

Diese Zahl muß das dreyfache Product aus dem Quadrate von 79600 in die nächste Ziffer der Wurzel mit 10 multiplicirt enthalten. Dividirt man also mit

$$3 \times 79600 \times 79600 \times 10$$

oder mit

$$190084800000$$

so wird der Quotient die nächste Ziffer der Wurzel, nämlich

$$\begin{array}{r|l} 1598397885504 & 8 \\ 190084800000 & \\ \hline 1520678400000 & \\ \hline 77719485504 & \end{array}$$

Man weis folglich jetzt, daß die Wurzel größer ist als 79680. Der gebliebene Rest muß aber noch enthalten

$$3 \times 79600 \times 80 \times 80 = 1528320000$$
$$80 \times 80 \times 80 = 512000$$
$$1528832000$$

Wird auch diese Zahl abgezogen, so bleibt

$$\begin{array}{r} 77719485504 \\ 1528832000 \\ \hline 76190653504 \end{array}$$

und dieser Rest muß das dreyfache Product aus dem Quadrate von 79680 in die noch unbekannte letzte Ziffer der Wurzel enthalten. Dividirt man also mit

$$3 \times 79680 \times 79680$$

oder mit

$$19046707200$$

so ist der Quotient die gesuchte letzte Ziffer der Wurzel; nämlich

$$\begin{array}{r|l} 76190653504 & 4 \\ 19046707200 & \\ 76186828800 & \\ \hline 3824704 & \end{array}$$

Die Wurzel ist also 79684. Der Rest aber muß noch aus folgenden Producten bestehen:

$$\begin{array}{rcr} 3 \times 79680 \times 4 \times 4 & = & 3824640 \\ 4 \times 4 \times 4 & = & 64 \\ \hline & & 3824704 \end{array}$$

Zieht man diese Zahl ab, so hebt sich alles auf, und also ist

$$505956733885504 = 79684 \times 79684 \times 79684.$$

§. 63. Die Darstellung im vorigen Paragraph, welche sich ganz auf die Entstehung des Cubus gründet, führt leicht auf folgendes praktische Verfahren.

1) Man theilt die gegebene Zahl von der Rechten gegen die Linke in Classen von drey Ziffern ab.

2) Man setzt als erste Ziffer der Wurzel eine der ersten neun Zahlen an, deren Cubus wenigstens nicht größer ist als die ganze erste Classe, und zieht diesen Cubus von der ersten Classe ab.

3) Zum Rest schreibt man die ganze nächste Classe, und der Divisor ist jedesmal das dreyfache Quadrat des Theiles der Wurzel, der bereits bekannt ist. Man setzt aber diesen Divisor so unter sein Dividend, daß rechts zwey Zifferstellen frey bleiben.

4) Nun dividirt man, und multiplicirt den Divisor mit dem Quotienten. Außer diesem aber multiplicirt man noch das dreyfache Quadrat des letzten Quotienten mit dem ganzen zuvor bekannten Theil der Wurzel, und schreibt dieses Product um eine Ziffer weiter rechts als das vorige und den Divisor. Endlich schreibt man auch den Cubus des letzten Quotienten noch um eine Ziffer weiter rechts unter die vorigen zwey Producte.

5) Diese drey Producte werden addirt, und ihre Summe wird vom Dividende abgezogen. Zum Reste wird wieder die nächste Classe geschrieben, und alle Regeln von der dritten an immer wieder befolgt, bis alle Ziffer der gegebenen Zahl verbraucht sind.

6) Geht die Operation nicht auf, so hat man anzunehmen, es seyen beliebig viele Decimalen vorhanden, welche bloß nicht angeschrieben wurden, weil sie alle Null sind. Man setzt also zum Reste immer drey Nullen statt einer neuen Classe.

7) Wenn die gegebene Zahl aus Ganzen und Decimalen, oder aus Decimalen allein besteht, beginnt die Theilung in Classen jedesmal bei dem Comma, welches die Ganzen und Decimalen trennt.

8) Soll die Cubicwurzel aus einem gemeinen Bruch gezogen werden, so muß man sie sowohl aus dem Zähler als aus dem Nenner ziehen, oder den gegebenen Bruch zuerst in einen Decimalbruch verwandeln, und aus diesem die Wurzel ziehen.

Beyspiel:

```
209|203|752|020|544  | 59364
125
84203
 75
675
1215
 729
80379
 3824752
 10443
 31329
   1593
     27
 3148857
  675895020
  1054947
  6329682
     64044
       216
  633608856
   42286164544
   105708288
   422833152
       284928
           64
   42286164544
         0
```

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Daniel Knodé

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Desberger, Franz Eduard,

Arithmetik, von der Rechnung mit benannten Zahlen angefangen

München 1832

Math.p. 105 s
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081654-2